PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 7. 1. April 1911. Redaktionsschluß für No. 8 am 8. April 1911. 12. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

Ch. Füchtbauer, Über Elektrizitätsleitung in gesättigtem Alkalimetalldampf. S. 225.

G. Leimbach, Unipolares Leitvermögen von Kontaktdetektoren und ihre Gleichrichterwirkung. S. 228.

E. Waetzmann, Über den Zusammenklang zweier einfacher Töne. S. 231.

M. K. Grober, Verwendung von Barretter und Thermoelement zu Meßzwecken. S. 239.

R. Lorenz, Die nicht achsensymmetrische Knickung dünnwandiger Hohlzylinder. S. 241.

K. Przibram, Über Ladungsbestimmungen an Nebelteilchen. S. 260.

F. Ehrenhaft, Über die Frage des Elementarquantums der Elektrizität. S. 261.

A. Joffé, Zu den Abhandlungen von F. Ehrenhaft: Über die Frage nach der atomistischen Konstitution der Elektrizität. S. 268.

P. P. Koch, Zahl der Zentren von Lichtemission und Intensitätsverhältnis verschiedener Interferenzordnungen. S. 268.

W. B. v. Czudnochowski, Bemerkung zu meinem Aufsatze „Einige neuere physikalische Projektions-Demonstrationen". S. 269.

W. W. Strong, Uran- und Neodymaggregate. S. 269.

Physikalische Technik:

Ch. T. Knipp, Ein leistungsfähiger und schnell wirkender Apparat zur Destillation von Quecksilber. S. 270.

Besprechungen:

M. Tscherning, Hermann von Helmholtz und die Akkommodationstheorie. S. 272.

Tagesereignisse. S. 272.

Personalien. S. 272.

Gesuche. S. 272.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über Elektrizitätsleitung in gesättigtem Alkalimetalldampf.

Von Christian Füchtbauer.

Vor einiger Zeit[1]) habe ich gezeigt, daß zwischen Elektroden in gesättigtem Natriumdampf schon bei weniger als 200°, wo der Dampfdruck noch sehr klein ist, ein erheblicher Strom übergeht, und zwar, wie bei den Metallen und ionisierten Gasen, bei beliebig geringer Spannung.

Aufgefallen war mir dabei die starke Unipolarität der Leitung[2]), sowie das nur angenäherte Eintreten eines Sättigungsstromes, was beides auf eine besondere Rolle der Elektroden hinweist. Ich habe nun ähnliche Versuche mit Cäsiumdampf mit einem technisch vollkommneren Apparat angestellt. Die Anordnung zeigt folgende schematische Skizze:

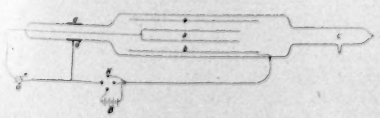


Fig. 1.

a ist die mit dem Galvanometer verbundene Meßelektrode, *b* eine zylindrische Elektrode, an welche Spannungen angelegt werden von der isolierten Batterie *B* durch Vermittelung des Kommutators *K*. Beide Elektroden sind aus Nickelblech und mittelst Platin eingeschmolzen. *d* ist ein beiderseits ins Glas eingeschmolzenes Platinröhrchen, das, als Schutzring mit der anderen Galvanometerklemme und dem Anfang der Akkumulatorenbatterie verbunden, das Überkriechen von Elektrizität längs des Glases verhindert.

Die Röhre war folgendermaßen hergerichtet. Zuerst wurde sie 4 Stunden auf 350° erhitzt unter dauerndem hohen Evakuieren mit der Gaedepumpe; dann wurde ca. 0,5 g Cäsiummetall hineindestilliert, hierauf Helium bis zu einem Druck von 196 mm hineingelassen. Das Helium strich dabei vor der Röhre über eine Schicht gleichfalls hineindestillierten Kaliums, um ihm die letzten Spuren Hahnfett usw. zu entziehen. Hierauf wurde die Röhre abgeschmolzen. Mit einem indifferenten Gas füllte ich die Röhre deshalb, um zu versuchen, ob nicht bessere Bedingungen für Ohmsches Gesetz und Sättigungsstrom dadurch erzielt werden könnten, daß außer dem Alkalidampf, der ja sehr geringen Druck hat, ein Gas von einem solchen Druck, wie man ihn sonst bei solchen Messungen meist hat, zugegen wäre. Es sollte also nur die Reibung der Ionen vergrößern. Helium wurde verwendet, um ganz sicher chemische Reaktion mit dem Alkalidampf auszuschließen. Zur Strommessung diente ein hochempfindliches Drehspulgalvanometer von Siemens[1]), bei den niedrigsten Temparaturen das etwa 10mal so empfindliche neue

1) Diese Zeitschr. **10**, 374, 1909. Vgl. auch J. J. Thomson-Marx, Elektrizitätsdurchgang in Gasen, S. 167.
2) l. c.

1) Empfindlichkeit $2{,}2 \times 10^{-10}$ Ampere bei dem benutzten Skalenabstand.

Modell von Hartmann & Braun, dessen Nullpunkt indes bei großen Ausschlägen lange nicht so konstant ist.

Die Röhre lag vollständig in einem elektrischen Ofen, der zur Erzielung sehr gleichmäßiger Temperatur innen einen durch Deckel geschlossenen Kupferhohlraum darstellte. Der Hauptfortschritt war eben, daß die Röhre keinen Teil mehr enthielt, der nicht mit erhitzt werden durfte.

Die Temperatur wurde mit Silberkonstantanthermoelementen gemessen, deren eine Lötstelle im Kupferofen, die zweite in Eis steckte. Es diente dazu ein Fadenzeigergalvanometer von Siemens.

Die Stromspannungskurven, die aufgenommen wurden, waren nun in der Tat sehr regelmäßig. Als z. B. die Temperatur während einer Stunde innerhalb der Fehlergrenzen der Temperaturmessung konstant war, waren die Ausschläge bis auf 2 Promille die nämlichen, wenn man die Kurve wieder rückwärts durchlief. Dabei waren zwischen der Beobachtung der identischen Ausschläge 20 bis 30 Minuten verstrichen. Dagegen wurden nach mehrtägigem Gebrauch der Röhre andere Werte bei der nämlichen Temperatur und Spannung erhalten, und zwar waren die kleinsten beobachteten Ausschläge $^2/_3$ der früher beobachteten. Deshalb teile ich nur, um von der Größe der Effekte eine Vorstellung zu geben, eine Kurve (Fig. 2) mit, in der die Ausschläge für 50 Volt und die Temperaturen angegeben sind. Meßbar wurden die Ströme mit dem Galvanometer gegen 100°, und sie wurden zur Schonung der Röhre vorläufig nur bis gegen 210° verfolgt. (In dieser sowie den folgenden Kurven sind Skalenteile des unempfindlicheren Galvanometers gemeint, dessen Empfindlichkeit oben angegeben ist.)

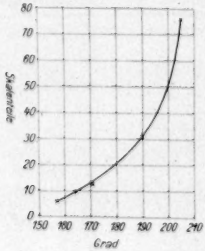


Fig. 2.

Man sieht das enorme Anwachsen der zu einer bestimmten Spannung gehörigen Stromstärke mit der Temperatur.

Weitere Schlüsse wollen wir aus dem angegebenen Grund nur aus der so konstanten Form der Kurven ziehen. Ich reproduziere in Fig. 3 2 Kurven, die bei gleicher Temperatur aufgenommen sind. Ich habe etwa 20 solcher Kurven genau aufgenommen, die alle dasselbe Verhalten zeigten. Die eine der 2 Kurven der Fig. 3 (in der Figur durch Kreise bezeichnet) ent-

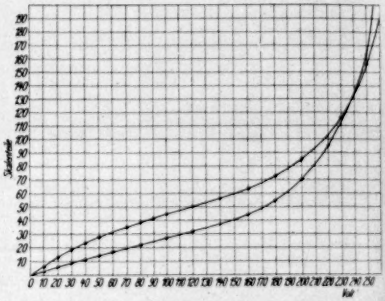


Fig. 3.

spricht positiver Spannung an der größeren (äußeren) Elektrode, die andere (durch Kreuze bezeichnete) negativer Spannung an der größeren Elektrode. Man sieht besonders an der positiven Kurve, bei der also der Strom von der größeren zur kleineren Elektrode geht, folgendes deutlich: Zwar ist ein Gebiet angenäherten Ohmschen Gesetzes, ein Gebiet angenäherten Sättigungsstromes und ein Gebiet starken Anwachsens durch Ionenstoß vorhanden. Aber die angenäherte Gültigkeit des Ohmschen Gesetzes dauert länger, als bei gleichmäßiger Volumionisation zu erwarten wäre. Eine Sättigung wird überhaupt nicht vollkommen erreicht, der Strom wächst dauernd, so daß sich an das schwächere Anwachsen im Gebiet des unvollkommenen Sättigungsstromes direkt das steile Wachsen durch Ionenstoß anschließt.

Ein ähnliches Verhalten beobachtet man nun stets, wenn die primäre (ohne Ionenstoß vorhandene) Ionisation von den Elektroden ausgeht, oder ganz, oder vorwiegend in nächster Nähe der Elektroden ihren Sitz hat. So ist z. B. die beim photoelektrischen Effekt auftretende Kurvenform experimentell diskutiert und theoretisch abgeleitet von Bloch[1]): Die Stromstärke wächst dort dauernd mit der Spannung und völlige Sättigung wird nicht erreicht. Dies rührt von dem großen Einfluß her, den bei Oberflächenionisation die Diffusion auf die Erscheinungen hat.

Zweitens legt der Umstand, daß im Gebiet

1) Le Radium 132, 1910.

der scheinbaren annähernden Gültigkeit des Ohmschen Gesetzes, wie erwähnt, der positive Strom von der größeren zur kleineren Elektrode viel stärker ist als der entgegengesetzte Strom bei gleicher angelegter Spannung, die Vermutung nahe, daß es sich nicht um gleichmäßige Volumionisation handeln kann.

Drittens floß auch ohne Anlegen irgendeiner Spannung, wenn also beide Elektroden einfach durch das Galvanometer geschlossen waren, ein mit der Temperatur stark wachsender Strom von der größeren zur kleineren Elektrode (innerhalb der Röhre). Er hängt augenscheinlich auch mit der Diffusion zusammen. Dieser Strom war ebenso regelmäßig wie der mit der Spannung beobachtete.

Dieses starke Hervortreten der Diffusion der Ionen beobachtet man sonst immer, wenn die Ionisation ganz oder vorwiegend in der Nähe der Elektroden ihren Sitz hat. In unserem Falle muß wohl die Beweglichkeit des positiven und negativen Ions äußerst verschieden, der Diffusionseffekt daher deutlich, sein, weil nach Frank im Helium die negativen Ionen Elektronen sind, und im Dampf des so stark elektropositiven Cäsiums sind sehr wahrscheinlich erst recht Elektronen die beständige Form.

Die Kurven der Fig. 3 deuten darauf hin, daß der Diffusionseffekt bei geringer Spannung neben der Spannung zur Geltung kommt, daher ist der annähernd dem Ohmschen Gesetz folgende Strom stärker, wenn das Vorzeichen der angelegten Spannung mit dem Diffusionsstrom geht, als wenn es ihm entgegen ist. Bei hoher Spannung dagegen überwiegt der Umstand, daß, wenn negative Elektronen durch die Spannung von der größeren Elektrode, an der sie zahlreicher sind, durch das Gas getrieben werden, der Ionenstoß kräftiger sein muß, als wenn im Gasraum die positiven Ionen überwiegen. Daher das stets beobachtete stärkere Ansteigen der „negativen" Kurve im Gebiet des Ionenstoßes, das stets zu einem Schneiden beider Kurven führte.

Der bei konstanter Temperatur ohne angelegte Spannung fließende Strom beweist natürlich, daß trotz der langen gleichmäßigen Temperatur kein vollständiges Gleichgewicht eingetreten ist, da ja sonst der zweite Hauptsatz verletzt wäre.

Die Frage, ob neben der Ionisation an der Oberfläche, für welche die angeführten Versuche mehr zu sprechen scheinen, noch eine nachweisbare Volumionisation des Alkalimetalldampfes vorhanden ist, bedarf der näheren Untersuchung, womit ich gegenwärtig beschäftigt bin. Bekanntlich schreiben Stark, W. Wien usw. dem positiven Ion eine wesentliche Rolle bei der Emission und Absorption der Serienspektren zu. Nach Vorstehendem kann man die gleichzeitige Absorption des Linienspektrums und Leitfähigkeit z. B. im unerregten Natriumdampf bei 200° so lange nicht im Sinn jener Theorien verwerten, als die eben aufgeworfene Frage nicht entschieden ist. Ich will damit den Zusammenhang zwischen Ionisation und Linienspektrum nicht als unwahrscheinlich hinstellen, aber ob man im erwähnten Fall die Volumionisation von der Oberflächenionisation trennen kann, ist noch unsicher.

Die Versuche mit ungesättigtem Dampf, welche diese Trennung ermöglichen und damit die Frage der Entscheidung näher bringen sollten, habe ich schon lange in Angriff genommen, jedoch waren die großen technischen Schwierigkeiten noch nicht vollkommen zu überwinden. Die Sache liegt eben so, daß beim Gleichgewicht über dem flüssigen Metall ein Dampfdruck von Elektronen besteht. Er kann sich durch den von der flüssigen Oberfläche ausgehenden Sättigungsstrom auch dann bemerklich machen, wenn die Volumionisation des Dampfes zum direkten Nachweis im ungesättigten Dampf zu schwach ist. Wenn umgekehrt schon der Dampf nachweisbar in positive und negative Ionen zerfallen sein sollte, würde sich wohl die Wirkung der Alkalimetallfläche durch Entsendung von Elektronen beim Sättigungsstrom ebenfalls bemerklich machen, und darin liegt dann eine Schwierigkeit für die Deutung von Versuchen mit gesättigtem Dampf.

Für die im vorstehenden wahrscheinlich gemachte Oberflächenionisation ergeben sich folgende Möglichkeiten: Entweder, nicht sehr wahrscheinlich, rühren die Elektronen aus den Nickelelektroden her, oder, viel wahrscheinlicher, sie gehen von der Oberfläche des geschmolzenen Cäsiums aus. Dieses kann ja beim Arbeiten mit gesättigtem Dampf die Elektroden teilweise bedecken.

Die „Verdampfung" von Elektronen aus flüssigen Alkalimetallen wäre, wenn sich die erwähnte Deutung bestätigte, analog der Elektrizitätsabgabe glühender Drähte, wie sie z. B. von Richardson besonders untersucht und theoretisch diskutiert ist.

Einfacher gestalten sich in unserm Fall die Verhältnisse vielleicht durch die niedrige Temperatur, die es gestattet, alles bei thermischem Gleichgewicht zu untersuchen.

Dementsprechend habe ich Versuche in Angriff genommen, bei denen die Nickelelektroden, eine wegen ihres Gasinhaltes bedenkliche Störungsquelle, durch reine Alkaliflächen ersetzt sind. Diese haben lediglich den Nachteil, daß bei ihnen die geometrische Form nicht so beliebig gewählt werden kann, wie bei festen Elektroden.

Daß bei den Alkalimetallen die Ströme von

ganz anderer Größenordnung sind wie in jenem Falle, und bei sehr tiefer Temperatur (beim Cäsiumdampf von ca. 90° an) schon mit dem Galvanometer meßbar sind, ist eine Eigentümlichkeit der Alkalimetalle, die vielleicht mit ihrer besonders stark elektropositiven Natur zusammenhängt.

(Eingegangen 17. März 1911.)

Unipolares Leitvermögen von Kontaktdetektoren und ihre Gleichrichterwirkung.

Von Gotthelf Leimbach.

Bereits 1874 fand F. Braun[1]) bei Stoffen wie Bleiglanz, Schwefelkies, Braunstein, Fahlerzen usw. Abweichungen vom Ohmschen Gesetz, welche besonders stark hervortraten, wenn eine der Elektroden eine kleine Berührungsfläche bot. Der Widerstand ergab sich abhängig von Richtung und Intensität des Stromes; eine Erklärung konnte für die Erscheinung jedoch nicht gefunden werden. 1901 erkannte Braun die Anwendbarkeit für den Hörempfang in der drahtlosen Telegraphie; die technische Ausführung übernahm 1905 die Gesellschaft für drahtlose Telegraphie. Inzwischen sind zahlreichen Erfindern eine große Reihe von Kombinationen, die sich im Kontakt mehr oder weniger brauchbar zum Nachweise elektrischer Schwingungen erwiesen haben, patentiert worden.

Gelegentlich der Untersuchungen über den Empfang elektrischer Wellen, die aus Mitteln der Stiftung des Herrn Dr. Krupp-v. Bohlen und Halbach für luftelektrische Forschungen bestritten wurden, kam ich bei der Auswahl geeigneter Wellendetektoren darauf, die von Austin[2]) vorgeschlagene Kombination Tellur-Silicium, die, wie er schreibt, in mancher Hinsicht noch besser als Tellur-Aluminium zu sein scheint, näher nachzuprüfen. Während Braun schon in den achtziger Jahren darauf hingewiesen hatte, daß der zu beobachtende Effekt jedenfalls nicht thermoelektrischer Natur sei, wurde ein solcher von Austin bei der Kombination Tellur-Aluminium zur Erklärung herangezogen. In einer zweiten Arbeit betonte Austin[3]) jedoch die unipolare Leitfähigkeit mehrerer Siliciumkombinationen, u. a. die von Tellur-Silicium, ohne speziell an dieser ausführlichere Untersuchungen anzustellen.

Die zur Ermittlung der unipolaren Leitfähigkeit anzuwendende einfache Methode besteht darin, Gleichspannung verschiedener Größe an den Kontakt zu legen und die resultierenden Stromstärken verschiedener Richtung zur Berechnung des scheinbaren, von Fall zu Fall variierenden Widerstandes heranzuziehen. Diese Methode übernahm ich von Austin, ohne jedoch mit Wechselstrom niedriger Frequenz die gleiche Meßreihe durchzuführen, da nach seinen Angaben wesentliche Unterschiede nicht zu erwarten waren. Tabelle I enthält eine Meßreihe an der Kombination Tellur-Silicium, bei der Tellur mit dem positiven, Silicium mit dem negativen Pole der Gleichstromquelle (Trockenelement mit Abzweigwiderstand) verbunden war.

Tabelle I.

Angelegte Spannung in Volt	Gemessene Stromstärke in Ampere	Berechneter „scheinbarer" Widerstand in Ohm
0,14	$6 \cdot 10^{-8}$	2 330 000
0,28	12	2 330 000
0,42	23	1 830 000
0,56	34	1 650 000
0,70	49	1 430 000
0,84	69	1 220 000
0,98	120	818 000

Die Tabelle zeigt die Änderung des Widerstandes mit wachsender Stromstärke im Widerspruche mit dem Ohmschen Gesetz und läßt daher nach den von H. Barkhausen[1]) entwickelten Prinzipien das System zur Erzeugung von Gleichstrom aus Wechselstrom geeignet erscheinen.

Tabelle II enthält eine zweite Meßreihe mit umgekehrter Stromrichtung. Silicium positiv, Tellur negativ.

Tabelle II.

Angelegte Spannung in Volt	Gemessene Stromstärke in Ampere	Berechneter „scheinbarer" Widerstand in Ohm
0,14	$7 \cdot 10^{-8}$	2 000 000
0,28	24	1 170 000
0,42	63	666 000
0,56	156	359 000
0,70	330	212 000
0,84	630	133 000
0,98	1 020	96 000
1,40	3 480	40 200
2,80	57 600	4 870
4,20	198 000	2 120

Die Widerstandsabnahme umfaßt bei dieser Stromrichtung drei Zehnerpotenzen, also ungleich mehr wie bei der Meßreihe der Tabelle I. Aus dem Vergleich der beiden Tabellen ergibt sich

1) F. Braun, Pogg. Ann. 1874; Wied. Ann. 1877, 1878, 1883.
2) L. W. Austin, diese Zeitschr. **8**, 600, 1907.
3) Ebenda **9**, 253, 1908.

1) H. Barkhausen, Das Problem der Schwingungserzeugung. Leipzig, S. Hirzel. 1907.

eine zwar nicht vollkommene, aber doch sehr starke unipolare Leitfähigkeit. Der Effekt ist in dem vorliegenden Falle weit ausgeprägter wie z. B. bei den von Austin untersuchten Kombinationen Silicium-Stahl, Kohle-Stahl und Tellur-Aluminium.

Trägt man die Spannungen als Abszissen, die Logarithmen der Widerstände als Ordinaten auf, so erhält man die Kurve der Fig. 1, aus

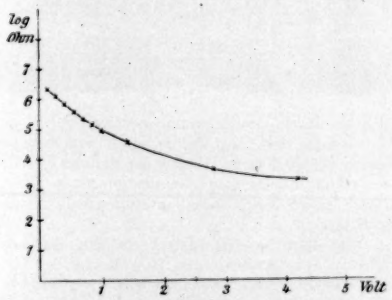


Fig. 1.

der hervorgeht, daß sich der Widerstand nach sehr raschem anfänglichem Abfall ohne Sprung asymptotisch der Abszisse oder mit anderen Worten einem wirklich Ohmschen Werte nähert.

Mehr noch wie die Widerstandskurve läßt die graphische Charakteristik die Kurve erkennen, die die den obigen Spannungswerten zugehörigen Stromwerte verbindet und die auch die Werte der umgekehrten Stromrichtung umfaßt. In Fig. 2 sind als Abszissen die angelegten Spannungen, als Ordinaten die gemessenen Stromstärken, d. h. die Werte der Tabellen I und II aufgetragen.

Die charakteristische Kurve verläuft im I. und III. Quadranten unsymmetrisch. Gleichen absoluten Spannungswerten verschiedenen Vorzeichens entsprechen ungleiche Werte der Stromstärke. Hierin liegt das Charakteristikum der unipolaren Leitfähigkeit. Beschickt man ein solches System mit Wechselstrom, so muß es als „Gleichrichter" wirken, da eine Stromrichtung begünstigt wird.

In der Tat ergab sich, wie bei der Schlömilchzelle und ähnlichen Detektoren, ein ausgesprochener Gleichstrom, wenn die Anordnung als Detektor in einen Empfänger elektrischer Wellen geschaltet war, und zwar in Übereinstimmung mit der Austinschen Beobachtung, ohne Anwendung einer äußeren elektromotorischen Hilfskraft. Die starke Unsymmetrie der Kurve ließ aber sofort erkennen, daß die Empfindlichkeit

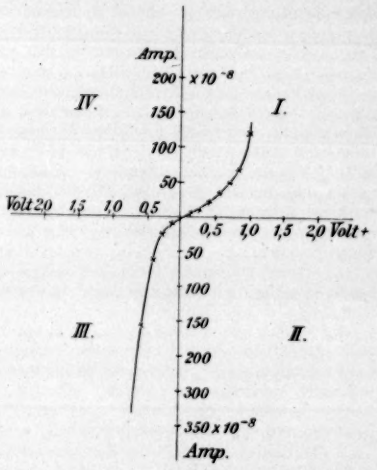


Fig. 2.

des Detektors durch eine Hilfsspannung weiter zu steigern sei. Hilfsspannungen sind bisher hauptsächlich nur beim elektrolytischen Detektor vom Typus der Schlömilchzelle angewandt worden, dessen Wirkung ganz verschieden aufgefaßt worden ist.

Eine allgemeine, von H. Brandes[1]) entwickelte Theorie für solche Gleichrichter ergibt für Kurven von der Fig. 2 als wesentliches Resultat: „Die Gleichrichterwirkung ist um so besser, je kleiner der Krümmungshalbmesser in dem betreffenden Punkte ist und je steiler die Charakteristik verläuft." Nach Brandes bestimmt also lediglich die eigenartige Form der Kurve die Gleichrichterwirkung, ohne Berücksichtigung einer etwa vorhandenen Polarisation bezw. Polarisationsänderung. Demgegenüber steht die Ansicht von M. Reich[2]) bei dem Spezialfalle der Schlömilchzelle, daß die Wirkung der Wellen in einer Entpolarisation der Zelle beruhe. Die von Reich angegebenen Versuche haben P. Ludewig[3]) zur Aufnahme von Charakteristiken der Schlömilchzelle veranlaßt und zugunsten der Reichschen Auffassung entscheiden lassen. Gegen das Brandessche Optimum der Gleichrichterwirkung spricht nach Ludewig die Steigerung der Empfindlichkeit, die man durch Verstärkung des Stromes erzielen kann. Dem Hilfsstrom ist erst da eine

1) H. Brandes, E.T.Z. 1906, S. 1015.
2) M. Reich, diese Zeitschr. **5**, 338, 1904.
3) P. Ludewig, Jahrb. f. drahtl. Telegr. **3**, 411.

obere Grenze gesetzt, wo die eigentlichen telegraphischen Zeichen durch das charakteristische Rauschen im Telephon, das regelmäßig sich ablösende Gasblasen verursachen, überdeckt werden.

Nachdem in dem Tellur-Siliciumdetektor ein Gleichrichter erkannt war, galt es zu entscheiden, ob einmal die eben geschilderte Empfindlichkeitssteigerung proportional mit der Stromstärke des Hilfsstroms, den wir mit Ruhestrom bezeichnen wollen, zu erzielen ist, bezw. ob die Stellen stärkster Krümmung in der Charakteristik sich als besonders empfindlich im Brandesschen Sinne erweisen.

Zu diesem Zwecke wurde der Tellur-Silicium-Detektor jetzt mit Hilfsspannung in einen Empfänger eingeschaltet und dieser durch elektrische Wellen hoher, aber konstanter Frequenz und Amplitude zu Schwingungen angeregt. Leider hatte eine Druckänderung den Detektor verändert, wie die im folgenden mitgeteilten Zahlen beweisen, der Einfluß ganz geringer Änderungen erweist sich damit als ganz bedeutend.

Tabelle III enthält die jedem Werte der Hilfsspannung entsprechenden Werte der Stromstärken (Ruhestrom); außerdem aber die Werte des durch die Wellen im Empfänger ausgelösten Stromes als Folge der Widerstandsherabsetzung.

Tabelle III.

Silicium negativ, Tellur positiv.

Hilfsspannung	Ruhestrom	Ausgelöster Strom
0,00 Volt	$0{,}00 \cdot 10^{-8}$ A.	$53 \cdot 10^{-8}$ A.
0,082	1,0	55
0,205	3,0	69
0,410	10	100
0,615	81	216
0,697	198	330

Wie man ohne weiteres erkennt, entspricht Tabelle III qualitativ der Tabelle I. Der Welleneffekt — Gleichstrom — fließt in der gleichen Richtung wie der Ruhestrom und der ausgelöste. Der in Gleichstrom umgesetzte hochfrequente Wechselstrom überwiegt anfangs bei weitem, dann macht sich die beträchtlichere Widerstandsherabsetzung durch den Ruhestrom geltend — es wirkt die Summe beider — und schließlich nur der Ruhestrom; damit muß aber das Verhältnis $\frac{\text{Ausgelöster Strom}}{\text{Ruhestrom}}$ abnehmen, wie auch aus der Tabelle ersichtlich ist.

Die Wirkung der Stromumkehr am Kontakt veranschaulicht Tabelle IV.

Wie man auf den ersten Blick sieht, wirkt der durch den Gleichrichter allein, ohne Hilfsspannung, erzeugte Strom, der von den Wellen herrührt, dem Ruhestrom entgegen. Allmählich

Tabelle IV.

Silicium positiv, Tellur negativ.

Hilfsspannung	Ruhestrom	Ausgelöster Strom
0,00 Volt	$0{,}00 \cdot 10^{-8}$ A.	$-80 \cdot 10^{-8}$ A.
0,082	1,0	−78
0,205	2,3	−66
0,410	4,0	−51
0,615	5,8	−39
0,820	10,5	+ 2
0,900	12,0	+70
1,050	17,0	135
1,260	48	216
1,470	111	375
1,680	297	2 220
2,100	840	5 040
2,940	8640	18 240

wird er durch den letzteren geschwächt, aber so langsam, daß sehr viel höheren Spannungswerten wie in Tabelle III erst der gleiche Stromwert entspricht. Die gegenelektromotorische Kraft scheint danach eine Größe von etwa 0,6—0,7 Volt zu haben.

Vor allem handelt es sich darum, die auffallende Stromumkehr des ausgelösten Effekts zu erklären. Beobachtet ist sie auch von anderer Seite mehrfach. Ferrié[1]) arbeitete z. B. mit einem elektrolytischen Wellenanzeiger zuerst ohne Hilfsspannung und erhielt bei Einwirkung der elektrischen Wellen anfangs einen Ausschlag des Galvanometers nach einer bestimmten Richtung. Bei zweckmäßiger Wahl der elektromotorischen Kraft erhielt er einen größeren Ausschlag nach der anderen Seite. Brandes machte die gleiche Beobachtung an einem Wehnelt-Oxydkathodenrohr und stellte fest, daß bei einer gewissen elektromotorischen Kraft der Galvanometerausschlag verschwand und endlich in die entgegengesetzte Richtung überging, genau wie in der Meßreihe der Tabelle IV.

Brandes greift zur Erklärung dieser Erscheinung wieder auf die Charakteristik zurück. Ich lasse seine Ausführungen hier wörtlich folgen, aber zweckmäßig gleich auf die in Frage kommende Charakteristik des Silicium-Tellur-Detektors bezogen, wie sie Tabelle III und IV in Fig. 3 liefert:

„Wir haben es offenbar in beiden Fällen zunächst mit einer Gleichrichter-Wirkung infolge unsymmetrischer Elektroden zu tun. Wir verschieben alsdann durch den Hilfsstrom die Stelle, an der wir die Schwingungen wirken lassen, auf der Charakteristik an einen Wendepunkt, in dem sie zu beiden Seiten symmetrisch ist, und gehen durch Vergrößerung der E. M. K. des Hilfsstromes über diesen Punkt hinaus. Während wir uns in Fig. 3 zunächst im Punkt O

1) G. Ferrié, C. R. 1905, 315.

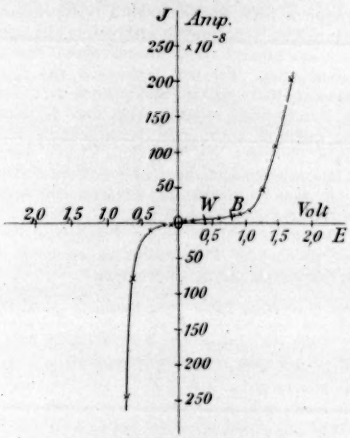


Fig. 3.

befinden, in dem wir Gleichrichtung in einem Sinne bekommen, gehen wir allmählich zu Punkt W über, in dem keine Gleichrichtung stattfindet und schreiten dann zu Punkt B fort, in dem Gleichrichtung im entgegengesetzten Sinne erfolgt und gleichzeitig verstärkte Wirkung."

Soviel über den Einfluß der Richtung des Hilfsstromes auf den Sinn der Gleichrichtung. Es bleibt noch die Frage zu beantworten, inwieweit der Hilfsstrom die Empfindlichkeit des Gleichrichters beeinflußt. Im Sinne der Brandesschen Auffassung müßte, wie oben hervorgehoben, die stärkste Gleichrichtungswirkung an den Stellen stärkster Krümmung in der Charakteristik, also bei + 1,05 und — 0,41 Volt, auftreten. In der Tat ergeben die Tabellen III und IV hier die größten Werte für das Verhältnis

$$\frac{\text{ausgelöster Strom}}{\text{Ruhestrom}},$$

nämlich 10 bezw. 8 Werte, wie sie nach Reich im günstigsten Falle bei elektrolytischen Detektoren auftreten können. Auch da ist das obige Verhältnis, wie eigene Versuche es von neuem bestätigt haben, nicht konstant, sondern besitzt ein deutliches Maximum[1]). Andererseits ist eine Steigerung des Absolutwertes des ausgelösten Stromes genau wie beim elektrolytischen Detektor durch Steigerung der Ruhestromstärke zu erreichen. Die im Telephon und Galvanometer bemerkbare Unruhe setzt auch hier der Stromsteigerung eine obere Grenze. Man wird daher gut tun, die Detektoren in der Nähe einer relativ großen Stromstärkeänderung zu benutzen, da das Ohr leichter relativ große Intensitätsänderungen als wie geringe Änderungen absolut großer Intensitäten wahrnimmt. Man darf nach diesen Ausführungen sich in praxi an die Brandesschen Gleichrichterbedingungen halten, ohne mit der Reichschen Auffassung der Depolarisation in Konflikt zu kommen, die vor allem für die Erklärung des Welleneffektes in Betracht kommt.

Daß Welleneffekt und der durch Erwärmung des Kontaktes erzeugte Thermostrom — wohl in manchen anderen Fällen auch — die gleiche Richtung haben, mag die Auffassung aufgebracht haben, daß der Welleneffekt ein thermoelektrischer ist. Aber auch hier ist, wie Reich es beim elektrolytischen Detektor gezeigt hat, die Größenordnung der Wellenenergie eine ganz andere und viel kleinere wie die der zur Erzeugung eines Thermostromes gleicher Größe erforderlichen Energie. Ob die Wirkung der Kontaktdetektoren sich gänzlich mit der auf Depolarisation beruhenden des elektrolytischen Detektors deckt, oder ob etwa ein stärkerer Elektronenaustritt aus der einen Elektrode die höhere Leitfähigkeit verursacht, soll hier nicht entschieden werden. Vielmehr war es mir darum zu tun, eine wohl selten auftretende und von der Natur des verwandten — sehr launischen — Siliciums offenbar stark abhängige Gleichrichterwirkung eines Kontaktdetektors zu beschreiben und mit der anderer Gleichrichter zu vergleichen. Vielleicht gelingt es, die schon zu hoher Empfindlichkeit gebrachten Kontaktdetektoren gleicher Art, soweit die Unipolarität ihrer Leitung sich dafür eignet, durch Anwendung zweckmäßig abgeglichener elektromotorischer Hilfskräfte noch empfindlicher zu gestalten.

Göttingen, Geophysikalisches Institut, den 18. Februar 1911.

(Eingegangen 20. Februar 1911.)

1) Für Kontaktdetektoren gefunden von M. C. Tissot, Soc. franç. d. Phys. N. 308, S. 4—6, 1910.

Über den Zusammenklang zweier einfacher Töne.

I. Zur Analyse der Resultierenden. — II. Schwebungen. — III. Kombinationstöne.

Von E. Waetzmann.

Abgesehen von einer sehr dankenswerten Arbeit von C. Stumpf[1]), finden sich in der Literatur nur wenige allgemeinere Angaben über

1) C. Stumpf, Zeitschr. f. Psychol. und Physiol. der Sinnesorgane **39**, 241, 1905.

die aus zwei Primärschwingungen resultierenden Kurven. Stumpf leitet an Hand eines von K. L. und M. Schaefer gezeichneten umfangreichen Kurvenmaterials praktische Regeln zur Deutung solcher Kurven ab, im allgemeinen jedoch ohne strenge Begründung; außerdem beschränkt er sich in der Hauptsache auf den Fall gleicher Amplituden der Primärtöne. Es sollen deshalb im folgenden die Hauptmerkmale der Resultierenden für zwei der wichtigsten einfacheren Fälle, nämlich gleiche Amplituden, oder gleiche lebendige Kräfte der Primärtöne, exakt abgeleitet und besprochen werden. Ferner sollen die Folgerungen erörtert werden, die sich aus der Form der Resultierenden ziehen lassen, besonders in bezug auf Schwebungen und Kombinationstöne. Obwohl hierbei manches Bekannte erwähnt werden muß, scheint mir eine etwas ausführlichere Besprechung erwünscht, weil sich auch in der neuesten Literatur noch zahlreiche unklare und unrichtige Vorstellungen über die fraglichen Probleme finden.

§ 1.

p und q seien die Schwingungszahlen der Primärtöne, wobei $p > q$ sei; die Periodenzahl r der Resultierenden pro sec ist gleich dem größten gemeinsamen Teiler von p und q. Es genügt also zur Diskussion der Resultierenden, ein Stück der Kurve zu betrachten, das einem Zeitintervall von der Größe $\frac{1}{r}$ entspricht. Wir wollen deshalb im folgenden p und q als die relativen Schwingungszahlen der Primärtöne ansehen, so daß r stets $= 1$ ist.

Hat man es mit einem verstimmten Primärtonintervall, z. B. der verstimmten Quinte 301:200 zu tun, so genügt es trotzdem, ein Kurvenstück zu betrachten, das sich nur über $\frac{1}{100}$ sec, also die Periode der unverstimmten Quinte, hinerstreckt, da sich die Verstimmung nur durch eine Verschiebung der Zacken von Hundertstel zu Hundertstel Sekunde bemerkbar macht. Kurve *a*, Fig. 1, ist die Resultierende einer unverstimmten Oktave, *b* die einer verstimmten Quinte. Die Kurven sind mit der Rußschreibmethode aufgenommen und photographiert.

Die in *b* sichtbare Verschiebung der Zacken

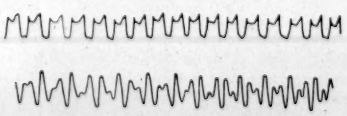


Fig. 1.

entspricht dem Wandern der Lissajousschen Figuren bei verstimmten Intervallen, ist somit auch ein genaues Kriterium für den Grad der Verstimmung. Bei der Diskussion der Resultierenden treten aber Schwierigkeiten auf, wenn die Verstimmung so groß wird, daß die Kurve mit gleichem Recht zwei benachbarten Intervallen, die durch ein Verhältnis kleiner ganzer Zahlen gegeben sind, zugeschrieben werden kann; dann kann es notwendig werden, eine ganze Periode der Resultierenden zu betrachten.

Ist die Amplitude beider Primärtöne $= a$, ihre anfängliche Phasendifferenz $= 0$, so ist die Elongation der Resultierenden

$$y = 2a \sin 2\pi \frac{p+q}{2} t \cos 2\pi \frac{p-q}{2} t.$$

y wird $= 0$, d. h. die Resultierende schneidet oder berührt die Mittellinie, wenn

$$\sin 2\pi \frac{p+q}{2} t = 0$$

oder

$$\cos 2\pi \frac{p-q}{2} t = 0$$

wird. Die Zahl der Nullstellen der Resultierenden pro Periode erhalten wir also, wenn wir prüfen, wie oft die beiden Ausdrücke innerhalb der Grenzen von $t = 0$ bis $t = 1$ gleich 0 werden. Der erste Ausdruck wird $= 0$ für

$$t = \frac{k}{p+q},$$

wo $k = 0, 1, 2, \ldots p+q-1$ ist, der zweite Ausdruck für

$$t = \frac{2k+1}{2(p-q)},$$

wo $k = 0, 1, 2, \ldots p-q-1$ ist. Der erste Ausdruck ergibt somit innerhalb einer Periode $p+q$, der zweite $p-q$, zusammen $2p$-Nullstellen. Die Zahl der Nullstellen innerhalb einer Periode der Resultierenden ist also gleich der doppelten größeren Verhältniszahl der Schwingungszahlen der Primärtöne. Dabei ist eine bloße Berührung (nicht Schnitt) der Resultierenden mit der Mittellinie doppelt zu zählen, weil hier zwei Nullstellen, je eine aus jeder der beiden Gruppen, zusammenfallen.

Zur Bestimmung der Verhältniszahl des tieferen Primärtones sind die Abstände der einzelnen Nullstellen zu betrachten. Die Zeitabstände für die der ersten Gruppe sind

$$\frac{1}{p+q} \text{ sec},$$

für die der zweiten

$$\frac{1}{p-q} \text{ sec}.$$

Von dem Anfangspunkt der beiden Primärtonkurven und damit der Resultierenden aus ge-

rechnet, liegt die erste Nullstelle der ersten Gruppe bei $t = 0$, die erste Nullstelle der zweiten Gruppe bei

$$t = \frac{1}{2(p-q)}.$$

Die erste Nullstelle der Resultierenden nächst der Anfangsnullstelle gehört also der ersten oder zweiten Gruppe an, je nachdem

$$\frac{1}{p+q} \lessgtr \frac{1}{2(p-q)},$$

also

$$p \lessgtr 3q$$

ist. Das heißt mit anderen Worten, das Stück der Mittellinie, dessen Länge einer ganzen Periode entspricht, dividiert durch den Abstand der Anfangsnullstelle von der nächstliegenden ist $= p+q$ für Intervalle, die kleiner sind als die Duodezime, und $= 2(p-q)$ für Intervalle, die größer als die Duodezime sind. Für das Intervall der Duodezime fallen die Werte $p+q$ und $2(p-q)$ zusammen; das entspricht einem Berührungspunkt der Resultierenden mit der Mittellinie. In dem Falle $p > 3q$ kann man der Gleichmäßigkeit halber statt des Abstandes der der Anfangsnullstelle benachbarten Nullstelle den der übernächsten ausmessen, und erhält alsdann auch hier durch Division dieses Abstandes in die Gesamtlänge einer Periode den Wert $p+q$. Ob der Abstand der ersten oder zweiten Nullstelle von der Anfangsnullstelle zu nehmen ist, richtet sich danach, ob auf das erste Maximum der Resultierenden ein niedrigeres oder ein höheres folgt. Man kann diese Schwierigkeit, wenn sie überhaupt als solche zu bezeichnen ist, aber umgehen, indem man einfach den größten Abstand zweier Nullstellen ausmißt, der stets einem Zeitunterschied von

$$\frac{1}{p+q}\,\text{sec}$$

entspricht. Wir haben somit ein Mittel, $p+q$ aus der Resultierenden zu bestimmen; da p durch das Auszählen der Nullstellen bestimmt ist, ist hiermit auch q gegeben.

Ist der größte Abstand zweier Nullstellen nur klein, so kann infolge der Abmessungsfehler die Bestimmung von q bis zu einem gewissen Grade unsicher werden. Jedoch bietet schon die bloße Betrachtung der Form der Resultierenden ein Mittel, diese Unsicherheit zu beseitigen, indem aus der Form zu ersehen ist, ob q eine gerade oder ungerade Zahl ist. Sind p und q ungerade, so sind die beiden Hälften der ersten (und auch der zweiten) Periodenhälfte vollkommen symmetrisch in bezug auf eine in der Mitte der halben Periode auf der Mittellinie errichteten Senkrechte. Ist dagegen p oder q gerade, so findet innerhalb einer Periodenhälfte keine Symmetrie statt. Um die in gleichen Abständen auf beiden Seiten der Mitte der ersten Periodenhälfte liegenden Elongationen y_1 und y_2 der Resultierenden zu finden, haben wir in dem Ausdruck für y die Zeit

$$t = \frac{1}{4} + \delta$$

zu setzen. Dann ist:

$$y_1 = 2a \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{p+q}{2} - \pi(p+q)\delta\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{p-q}{2} - \pi(p-q)\delta\right),$$

$$y_2 = 2a \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{p+q}{2} + \pi(p+q)\delta\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{p-q}{2} + \pi(p-q)\delta\right).$$

Sind p und q ungerade, so sind $p+q$ und $p-q$ gerade; dagegen ist von den Werten

$$\frac{p+q}{2} \quad \text{und} \quad \frac{p-q}{2}$$

der eine gerade, der andere ungerade, was sofort zu sehen ist, wenn man schreibt:

$$\frac{p-q}{2} + q = \frac{p+q}{2}.$$

Wir setzen jetzt in abgekürzter Form:

$$y_1 = 2a \sin\left(\frac{\pi}{2}h - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}k - \beta\right)$$

$$y_2 = 2a \sin\left(\frac{\pi}{2}h + \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}k + \beta\right).$$

Nun ist für gerades h und t:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}h - \alpha\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}h + \alpha\right)$$

und

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}k - \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}k + \beta\right)$$

und für ungerades h und k:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}h - \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}h + \alpha\right)$$

und

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}k - \beta\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}k + \beta\right).$$

Das besagt, daß y_1 und y_2 einander gleich sind und gleiches Vorzeichen haben, daß also vollkommene Symmetrie in bezug auf

$$t = \frac{1}{4}$$

herrscht. Auf analoge Weise läßt sich zeigen, daß für den Fall von geradem p oder q keine Symmetrie vorhanden ist. Fig. 2 und 3 illustrieren das Gesagte.

Es lassen sich noch weitere Gesetzmäßig

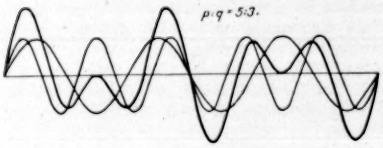


Fig. 2.

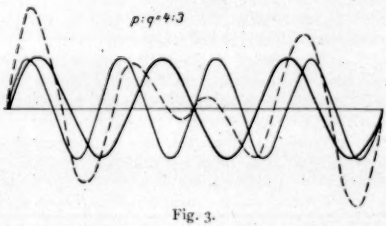


Fig. 3.

keiten auf einfache Weise ableiten, z. B., daß die in gleichen Abständen auf beiden Seiten von

$$t = \frac{1}{2}$$

liegenden Werte der Resultierenden dem absoluten Werte nach gleich sind, aber entgegengesetztes Vorzeichen haben. Zur Diskussion der Resultierenden genügt hiernach in der Regel die Betrachtung einer Periodenhälfte. Diese Gesetzmäßigkeiten dürften allgemein bekannt sein, sind jedenfalls schon von Stumpf (l. c.) besprochen worden.

Wir gehen zu dem Fall über, daß die lebendige Kraft der beiden Primärschwingungen die gleiche ist; die Elongation der Resultierenden ist bei anfänglicher Phasendifferenz 0:

$$y = a_1 \sin 2\pi p t + a_2 \sin 2\pi q t,$$

hierbei ist also

$$a_1 p = a_2 q.$$

Maxima oder Minima von y (Zacken der Kurve) erhält man für Werte von t, für die

$$a_1\, 2\pi p \cos 2\pi p t + a_2\, 2\pi q \cos 2\pi q t = 0$$

oder

$$\cos 2\pi \frac{p+q}{2} t \cos 2\pi \frac{p-q}{2} t = 0$$

ist. Man erhält also zwei Gruppen diskreter Werte von t, für welche y ein Maximum oder Minimum wird:

$$t' = \frac{2k+1}{2(p+q)}$$

und

$$t'' = \frac{2k+1}{2(p-q)},$$

wo $k = 0, 1, 2, \ldots$ ist. Innerhalb einer Periode nimmt k in der ersten Gruppe die Werte

$$0, 1, 2, \ldots p+q-1$$

an, in der zweiten Gruppe die Werte

$$0, 1, 2, \ldots p-q-1.$$

Die Gesamtzahl der Maxima und Minima pro Periode, die sich aus den $p+q$ Werten y' der ersten und den $p-q$ Werten y'' der zweiten Gruppe zusammensetzt, ist somit gleich $2p$.

Die Werte y' folgen einander in Zeitabständen von

$$\frac{1}{p+q} \text{ sec},$$

die y'' von

$$\frac{1}{p-q} \text{ sec}.$$

Die dem Anfangspunkt der Periode nächstliegenden Werte von y' resp. y'' sind um

$$\frac{1}{2(p+q)} \text{ resp. } \frac{1}{2(p-q)} \text{ sec}$$

von ihm entfernt; der nächstgelegene Maximal- oder Minimalwert von y gehört also stets zur Gruppe y'. Mißt man den Abstand des Fußpunktes der von ihm auf die Mittellinie gefällten Senkrechten vom Anfangspunkt und dividiert mit diesem Abstand die Gesamtlänge der Periode, so erhält man $2(p+q)$, und damit q, da p durch das Auszählen der Zacken bekannt ist.

Wir können also in den beiden besprochenen Fällen leicht die Hauptmerkmale einer aus zwei Primärtönen zusammengesetzten Schwingungskurve angeben und dieselbe natürlich auch rückwärts analysieren. Wählt man die anfängliche Phasendifferenz nicht $= 0$, was wir der Bequemlichkeit wegen immer tun, so bleiben die Hauptregeln erhalten. Sind weder die Amplituden noch die lebendigen Kräfte der Primärschwingungen die gleichen, so bekommt man etwas andere Resultate, die sich aber von Fall zu Fall auf ähnliche Weise wie die obigen ableiten lassen. Das Bisherige ist etwas ausführlicher besprochen worden, als an sich wohl notwendig gewesen wäre, weil es für das Folgende von Bedeutung ist.

§ 2.

Das bekannte typische Bild von Schwebungskurven erhält man nur, wenn die Amplituden der Primärtöne nicht allzu verschieden sind und ihre Schwingungszahlen p und q nahe aneinanderliegen. Die Zahl der Schwebungen pro sec ist dann $= p - q$. Sind die Amplituden beider Primärtöne gleich und ist ihre anfängliche Phasendifferenz $= 0$, so ist die Resultierende

$$a \sin 2\pi p t + a \sin 2\pi q t.$$

Dieser Ausdruck kann in der Form geschrieben werden

$$2a \cos 2\pi \frac{p-q}{2} t \sin 2\pi \frac{p+q}{2} t.$$

Aus dieser Form wird das Auftreten der Schwebungen hergeleitet, indem

$$2a \cos 2\pi \frac{p-q}{2} t$$

als Amplitudenfaktor für den Ton von der Schwingungszahl $\frac{p+q}{2}$ aufgefaßt wird. Schwankt die Amplitude pro sec $\frac{p-q}{2}$ mal, so schwankt die Intensität $p-q$ mal, da

$$\cos^2 2\pi \frac{p-q}{2} t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\pi [p-q] t)$$

ist. Solange $p-q$ sehr klein ist, ist diese Auffassung auf den ersten Blick sehr bestechend, muß aber trotzdem als irreführend bezeichnet werden.

Das Auftreten einer Sinusfunktion in dem Ausdruck für die Resultierende kann nur dann als das Vorhandensein eines Tones, dessen Schwingungszahl gleich der Periodenzahl des Sinus ist, gedeutet werden, wenn der Sinus als Summand, nicht aber, wenn er als Faktor eines Produktes auftritt, dessen anderer Faktor nicht konstant ist, sondern selbst mit der Zeit variiert. Der Definition des Tones als Sinusschwingung liegt mathematisch zugrunde das Fouriersche Theorem, physikalisch die Resonanz und entsprechend physiologisch die Resonanztheorie des Hörens, die eine Konsequenz oder richtiger Voraussetzung des Ohmschen Gesetzes ist. Nur weil es mathematisch möglich ist, eine komplizierte Schwingung als Summe von Sinusschwingungen darzustellen und weil ferner diese einzelnen Summanden durch Resonatoren tatsächlich verstärkt und auch ohne Resonatoren gehört werden, ist unsere Tondefinition berechtigt. Es hätte also keinen Sinn, die Empfindung eines einfachen Tones auf das Vorhandensein einer Sinusschwingung im Außenraum zurückführen zu wollen, wenn das Ohr keinen Resonanzapparat enthielte. Entsprechend hat es physikalisch keinen Sinn, einen Schwingungsvorgang, der in einem der Resonatoren im Ohre vor sich geht, nochmals in Sinusschwingungen zerlegen zu wollen, da jetzt kein Apparat vorhanden ist, der diese Zerlegung besorgen könnte. Hiernach dürfte einleuchtend sein, daß das Auftreten eines Sinus als Faktor eines Produktes, dessen anderer Faktor auch eine Funktion der Zeit ist, das Vorhandensein eines Tones von der betreffenden Schwingungszahl weder physikalisch noch physiologisch verständlich zu machen vermag.

Jedoch könnte es zunächst erlaubt erscheinen, für sehr kleine Werte von $p-q$ aus dem Ausdruck

$$2a \cos 2\pi \frac{p-q}{2} t \sin 2\pi \frac{p+q}{2} t$$

das Auftreten eines Tones von der Schwingungszahl $\frac{p+q}{2}$ herzuleiten, da in diesem Fall die Resultierende der dem Ton von der Schwingungszahl $\frac{p+q}{2}$ entsprechenden Kurve über große Strecken hin sehr ähnlich ist. Ein langsam abklingender Ton wird ja auch als einfacher Ton empfunden, obwohl hier wie dort eine allmähliche Amplitudenänderung eintritt. Der große Unterschied ist aber der, daß im ersten Falle doch eine strenge Periode vorhanden ist, die der Analyse zugrunde gelegt werden muß. Das Resultat derselben ist dann ein ganz anderes als das Aussehen der Kurve erwarten läßt. Die Fourieranalyse ist eben äußerst labil, und deshalb muß die Periode der zu analysierenden Kurve mit allergrößter Sorgfalt bestimmt werden.

H. Starke[1]) hat eine Erklärung gesucht, weshalb ein auf $\frac{p+q}{2}$ abgestimmter Resonator nicht mittönt und glaubt den Grund hierfür darin gefunden zu haben, daß die Amplitude $p-q$ Phasensprünge pro sec erleide. Deshalb werde die Wirkung, welche einige aufeinander folgende Schwingungen des Tones $\frac{p+q}{2}$ auf den Resonator ausüben, durch die schnell folgenden entgegengesetzter Phase ausgelöscht. Hierzu ist zunächst zu bemerken, daß Phasensprünge in der Resultierenden durchaus nicht immer vorhanden sind (vgl. z. B. Fig. 3), es hängt dies von dem Verhältnis der Primärschwingungen ab. Außerdem erhält man tatsächlich ein Mittönen gewöhnlicher auf $\frac{p+q}{2}$ abgestimmter Luftresonatoren beim gleichzeitigen Ertönen von p und q, wenn das Intervall $p:q$ nicht zu groß ist. Das liegt aber natürlich nur an der starken Dämpfung der Luftresonatoren, infolge deren sie gleichzeitig auf p und q ansprechen und sich damit die Schwebungen neu bilden. Nimmt man schwach gedämpfte Resonatoren, z. B. Stimmgabeln auf Resonanzkästen, die auf $\frac{p+q}{2}$ abgestimmt sind, so hört das Mittönen derselben schon bei entsprechend kleineren Intervallen $p:q$ auf. Der wirkliche Grund dafür, daß auf $\frac{p+q}{2}$ abgestimmte Resonatoren bei entsprechend schwacher Dämpfung nicht mittönen, wenn p und q gleichzeitig angegeben werden, ist nach den obigen Ausführungen einfach der, daß der Ton

1) H. Starke, Verh. d. D. Phys. Ges. 10, 285, 1908.

$\frac{p+q}{2}$ nicht existiert; denn er tritt in der Darstellung der Resultierenden nur als Faktor eines Produktes auf.

Starke[1]) schließt ferner, daß „der Mittelton dann nicht mehr gehört werden können sollte, wenn zwischen jeder Phasenänderung weniger Schwingungen desselben liegen, als im Minimum zur Erregung eines Tones nötig sind". Er findet diese Forderung im großen ganzen im Einklang mit den Ergebnissen der Untersuchungen über die Minimalzahl von Schwingungen, welche zur Wahrnehmung der Tonhöhe nötig ist. Auch hierin kann ich Starke nicht beistimmen. Mir scheint der ganzen Überlegung wieder die Voraussetzung zugrunde zu liegen, daß schon im Außenraum ein Ton von der Schwingungszahl $\frac{p+q}{2}$, wenn auch mit Phasensprüngen, vorhanden ist, eine Auffassung, die prinzipiell abzulehnen ist. Da die auf das Ohr auftreffende Schwebungskurve durch die Ohrresonatoren in ihre ursprünglichen Bestandteile zerlegt wird, und da erst infolge der Dämpfung in den zwischen p und q liegenden Resonatoren neue schwebende Schwingungen entstehen, kann für ihre Wahrnehmung nicht das maßgebend sein, was für einen schon im Außenraum existierenden Ton gilt. Vielmehr ist die wahrscheinlichste Annahme die, daß hier schon eine Schwingung, eventuell sogar, — unter der Annahme spezifischer Energien für die Ohrresonatoren — weniger als eine Schwingung ausreicht, um einen Ton bestimmter Höhe zur Empfindung zu bringen. Übrigens möchte ich betonen, daß durch die besprochenen Ausstände die übrigen Starkeschen Ausführungen nicht berührt werden und ihren Wert behalten.

Wir können jetzt auch leicht positive Aussagen über die Schwebungen machen; der Kürze halber will ich mich auf den physikalisch interessantesten Fall beschränken, daß das Intervall der Primärtöne so gewählt ist, daß neben den beiden Primärtönen ein schwebender „Mittelton" gehört wird. Dieses Intervall reicht von etwa der großen Sekunde bis in die Nähe des Einklanges[2]). Nach obigem dürfte ohne weiteres einleuchtend sein, daß irgendwelche Zerlegung der Resultierenden für die Frage nichts entscheiden kann, sondern daß die Resultierende selbst betrachtet werden muß. Es liegen nun zwei Möglichkeiten vor. Entweder, die Ohrresonatoren besitzen spezifische Energien im Helmholtzschen Sinne, d. h. jeder Ohrresonator bringt, wie er auch erregt werden mag, nur eine bestimmte Tonhöhe zur Empfindung. In diesem Falle müßte der schwebende Ton von konstanter Höhe sein, die aber im allgemeinen nicht durch die Schwingungszahl $\frac{p+q}{2}$ gegeben ist, sondern von dem Stärkeverhältnis der Primärtöne abhängt, denn es werden diejenigen Ohrresonatoren die Tonhöhe bestimmen, die von beiden Primärtönen etwa gleich stark erregt werden[1]). Hiernach ist bei gleichen Amplituden der Primärtöne ein Schwebungston zu erwarten, der mit p und q das gleiche Intervall bildet, also etwas näher an dem tieferen Ton q als an p liegt. Diese Erwartung wird durch das Experiment bestätigt[2]). Die zweite Möglichkeit wäre die, daß die einzelnen Ohrresonatoren keine spezifischen Energien besitzen und daß dann die Form der Resultierenden, in erster Linie die Abstände ihrer Nullstellen voneinander, für die Höhe des schwebenden Tones maßgebend ist. Es wäre dann ein Ton zu erwarten, der sich nicht nur in der Stärke, sondern auch in der Höhe ändert. Für gleiche Amplituden der Primärtöne ist der Abstand der einzelnen Nullstellen der Resultierenden, und damit die in jedem Zeitmoment zu erwartende Tonhöhe aus dem im ersten Paragraphen Gesagten ohne weiteres zu entnehmen.

Tatsächlich liegen eine größere Anzahl von Angaben über beobachtete Tonhöhenschwankungen bei Schwebungen vor. Auch Helmholtz gibt an, solche Höhenschwankungen beobachtet zu haben und leitet ihre Größe rechnerisch ab[3]), ohne übrigens, was schon Stumpf[4]) hervorhebt, darauf hinzuweisen, daß diese Beobachtungen mit seiner Theorie der spezifischen Energien unvereinbar wären. Die Helmholtzschen Berechnungen dürfen nur als rohe Annäherungen angesehen werden, was schon daraus hervorgeht, daß bei seiner Art der Berechnung der schwebende Ton für gleiche Amplituden der Primärtöne konstante Höhe haben würde. Ein Blick auf Fig. 3 lehrt, daß dieses Resultat allgemein nicht richtig ist. S. Taylor[5]) bespricht den Fall gleicher Amplituden der Primärtöne ausführlich und kommt ebenfalls zu dem unrichtigen Resultat[6]), daß hierbei ein Schwanken der Höhe des schwebenden Tones nicht stattfinden könne. Dieser Irrtum ist wieder auf die einseitige Betrachtung des Faktors

1) H. Starke, l. c. S. 287.
2) Vgl. C. Stumpf, Tonpsychologie **2**, 481, 1890.

1) Betreffs des Zusammenwirkens mehrerer Ohrresonatoren vgl. C. Stumpf (l. c.).
2) C. Stumpf, l. c. S. 480 u. 481.
3) Helmholtz, Tonempfindungen. 5. Ausg. Beil. 14.
4) Stumpf, l. c. S. 474.
5) S. Taylor, Phil. Mag. **44**, 56, 1872.
6) Bereits von Stumpf (l. c.) als unrichtig bezeichnet.

$$\sin 2\pi \frac{p+q}{2} t$$

zurückzuführen.

Wenn wirklich Tonhöhenschwankungen bei Schwebungen auftreten, so ist, wie gesagt, die Größe derselben aus der Form der Resultierenden zu ersehen. Man ist deshalb in der Lage, die günstigsten Bedingungen für die Beobachtung etwaiger Schwankungen auf einfache Weise festzustellen. Trotzdem konnte ich in zahlreichen Beobachtungsreihen, die bei verschiedenen Amplituden- und Schwingungszahlenverhältnissen der Primärtöne ausgeführt wurden, ein Schwanken der Tonhöhe mit Sicherheit nicht konstatieren. Die Primärtöne, die von offenen Pfeifen geliefert wurden, wurden aus dem Schallzimmer durch getrennte Rohrleitungen nach dem Beobachtungszimmer geleitet, wo sich die beiden Rohrleitungen vereinigten. Im Beobachtungszimmer waren seitlich an die Rohrleitung eine größere Zahl von Interferenzröhren angeschlossen. So konnten sowohl sämtliche Obertöne vernichtet, als auch das Amplitudenverhältnis der Primärtöne wenigstens für kleine Intervalle, bestimmt werden. Da trotzdem das Resultat der Beobachtungen ein negatives war, scheint es mir nicht ausgeschlossen, daß die früheren positiven Beobachtungen auf Täuschungen beruhen, für die zahlreiche Möglichkeiten vorliegen. Diese Ansicht erscheint um so wahrscheinlicher, als auch ein Beobachter wie Stumpf[1]) trotz sorgfältigster Untersuchungen ein positives Resultat nicht erhalten hat. Wenn wirklich bei Schwebungen keine Tonhöhenschwankungen in der Empfindung zustande kommen, so spricht das unbedingt für die Theorie der spezifischen Energien, die wir ja auch für die Erklärung gewisser pathologischer Erscheinungen zurzeit nicht entbehren können.

§ 3.

Die Frage, ob es möglich ist, bei ungestörter Superposition der Primärtöne aus der Form der Resultierenden Kombinationstöne herzuleiten, wird immer noch verschieden beantwortet. Neuerdings hat sich wieder Auerbach[2]) für ihre Bejahung entschieden, indem er die von W. Voigt[3]) für diesen Fall gegebene Theorie akzeptiert. Mir scheint jedoch, daß die an sich äußerst interessanten Ausführungen Voigts das Auftreten der subjektiven Kombinationstöne nicht zu erklären vermögen. Meines Erachtens liegt heute auch kein unabweisbares Bedürfnis für solche Theorie mehr vor, nachdem in neuerer Zeit, lange nach Aufstellung der Voigtschen Theorie, endlich der einwandfreie Beweis gelungen ist[1]) daß bei gestörter Superposition tatsächlich objektive Kombinationstöne entstehen. Die Annahme, daß ähnliche Verhältnisse, wie sie für das Zustandekommen objektiver Kombinationstöne im Außenraum maßgebend sind, auch im Ohr selber vorliegen, ist sehr wahrscheinlich; deshalb ist es nicht mehr notwendig, das Auftreten subjektiver Kombinationstöne auf Empfindungsvorgänge zurückzuführen, zumal auf Vorgänge, deren Realität als recht unwahrscheinlich erscheint.

Die Theorie Voigts sucht abzuleiten, daß[2]) „unser Ohr die Eigenschaft besitzt, regelmäßig wiederkehrende einzelne Impulse, deren Intensität periodisch wechselt, zu einem Ton zusammenzufassen von der Höhe, welche ein einfacher Ton mit gleicher Periode besitzt". Ich will mich auf die Besprechung des einen Spezialfalles beschränken, daß die Primärtöne gleiche lebendige Kräfte besitzen, aus dem das Auftreten der subjektiven Töne $p-q$ und $p+q$ hergeleitet wird. Zur Veranschaulichung diene Fig. 4. Die

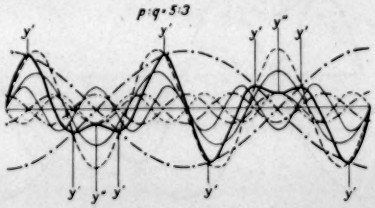


Fig. 4.

schwach ausgezogenen Kurven sind die Schwingungskurven der Primärtöne, die stark ausgezogenen die der Resultierenden. Voigt zeigt nun, daß sich die Maxima und Minima der Resultierenden in zwei Gruppen, die Gruppe der y' und die der y'' teilen lassen, deren jede auf je 2 um π gegeneinander verschobenen Sinuslinien von den Periodenzahlen $\frac{p-q}{2}$ resp. $\frac{p+q}{2}$ liegt. In die Figur sind diese Sinuslinien gestrichelt und punktiert eingezeichnet. Auf diese Gruppierung führt Voigt das Auftreten der Kombinationstöne $p-q$ resp. $p+q$ zurück. Die aus der Figur leicht ersichtliche, und wie mir scheint, sehr bedenkliche Tatsache, daß für den Ton $p+q$ viel weniger Werte y'' zur Verfügung stehen, als die Schwingungszahl dieses Tones beträgt, wird zugunsten der Theorie gedeutet, indem hierdurch, sowie durch die

1) C. Stumpf, l. c. S. 478.
2) F. Auerbach, Akustik, S. 636, 1909.
3) W. Voigt, Wied. Ann. **40**, 652, 1890.

1) K. L. Schaefer, Ann. d. Phys. **17**, 572, 1905; und E. Waetzmann, Ann. d. Phys. **20**, 837, 1906.
2) W. Voigt, l. c. S. 653.

Größenverhältnisse der y'' die Tatsache eine Erklärung finden soll, daß der Summationston in vielen Fällen gar nicht und wenn überhaupt, nur schwach gehört wird. Man könnte diese Argumentation übrigens noch erweitern und für gewisse Fälle auch auf den Differenzton anwenden. Sogenannte zwischenliegende Differenztöne nämlich, das sind solche, deren Schwingungszahlen zwischen denen der Primärtöne liegen, sind nur sehr schwer zu beobachten. Tatsächlich liegen nach der Voigtschen Theorie die Verhältnisse für das Zustandekommen des Differenztones hier ungünstiger als für die Fälle, daß das Intervall der Primärtöne kleiner als eine Oktave ist. In Fig. 5 ist z. B. die Resultierende für das Primärtonintervall 3 : 1 gezeichnet, außerdem die Sinuslinien, auf denen nach Voigt

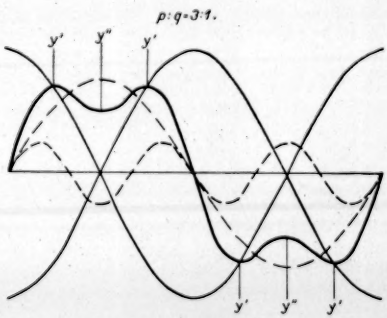


Fig. 5.

die y' liegen. Wie Figur zeigt, sind die y' ihrem absoluten Betrage nach gleich, womit nach der Voigtschen Theorie die geringe Intensität von $p - q$ erklärt werden könnte. Diese Übereinstimmung der Theorie mit dem Experiment scheint mir um so bemerkenswerter, als sich aus der Helmholtzschen Theorie die geringe Intensität der zwischenliegenden Differenztöne bisher nicht hat erklären lassen.

Trotz dieser Vorzüge werden wir die Voigtsche Ableitung schon deshalb aufgeben müssen, weil die ganze Betrachtung nicht eindeutig ist. Bei Intervallen, bei denen der Summationston, wenn auch schwach, so doch deutlich zu beobachten ist, lassen sich die y'' nicht nur auf Kurven verteilen, aus denen man auf $p + q$ Intensitätsschwankungen pro sec schließen würde, sondern auch auf Kurven, die andere Periodenzahlen ergeben, und es ist nicht einzusehen, weshalb das Ohr gerade die eine Periodenzahl $p + q$ bevorzugen sollte. Ähnlich liegen die Verhältnisse bei dem Differenzton. In Fig. 4 sind z. B. gestrichelt zwei Sinuskurven mit den Schwingungszahlen p resp. q eingezeichnet, auf denen die y'' resp. y' liegen. Hiernach könnte man erwarten, daß die y' resp. y'' Töne von den Schwingungszahlen $2q$ resp. $2p$ ergeben. Eine einfache Rechnung zeigt ganz allgemein, daß die y' stets auf einer Sinuslinie von der Periodenzahl q und der Amplitude $a_2 + a_1$ liegen; diese Sinuslinie hat zu Beginn der Periode der Resultierenden gleiche Phase mit den beiden Primärschwingungen. Analog läßt sich zeigen, daß die y'' stets auf einer Sinuslinie von der Periodenzahl p und der Amplitude $a_2 - a_1$ liegen; diese Sinuslinie ist zu Anfang der Resultierenden gegen die Primärschwingungen um π verschoben. Bei dem Intervall 5 : 3 in Fig. 4 würde man die Voigtsche Gruppierung deshalb be-

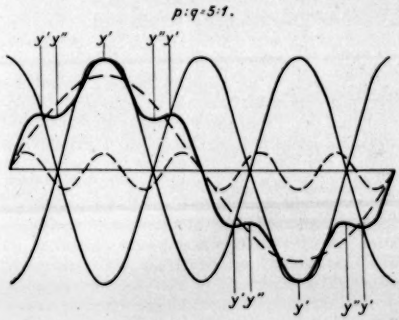


Fig. 6.

vorzugen, weil hier wirklich die y' periodisch mit der Zahl $p - q$ schwanken trotz der an sich vollkommen willkürlichen Aussonderung der y'' aus der Gesamtzahl der Maxima und Minima. Bei anderen Intervallen dagegen ist die periodische Intensitätsschwankung der y', wie z. B. aus Fig. 6 zu ersehen ist, gar nicht periodisch mit $p - q$, deshalb kann die Lagerung der y' auf die beiden um π gegeneinander verschobenen Sinuslinien von der Periodenzahl $\frac{p-q}{2}$ hier bestimmt nicht die von Voigt ihnen beigelegte Bedeutung besitzen, sondern ist eine rein formale Operation, der wir ebensowenig eine physikalische Bedeutung beimessen können, wie z. B. der Lagerung der y' auf der Sinuslinie mit der Periodenzahl p in Fig. 4. Meines Erachtens sind wir nach dem Gesagten gezwungen, die Voigtsche Theorie, so geistvoll und bestechend sie auch ist, aufzugeben.

Breslau, Physikalisches Institut, Febr. 1911.

(Eingegangen 27. Februar 1911.)

Verwendung von Barretter und Thermoelement zu Meßzwecken.

Von Max Karl Grober.

In seiner Arbeit: „Über die Empfindlichkeit der Barretter und die Zuverlässigkeit der mit ihnen ausgeführten Messungen" findet Neuhaus[1]) S. 40, daß ein Anwachsen der Dämpfung mit zunehmendem Barretterwiderstand erkennbar ist und er spricht sich bei der Zusammenfassung der Resultate dahin aus, daß das Resultat der Dämpfungsmessung auch, wenngleich in geringem Maße, vom Barretterwiderstand beeinflußt wird. Barretter mit erheblich größerem Widerstande ergeben größere Werte für das Dämpfungsdekrement. In einer Anmerkung fügt er jedoch schon hinzu, daß es nach neuesten Messungen fraglich sei, ob nicht ein Teil der beobachteten Zunahme auf sekundäre Einflüsse zu schieben sei und verweist auf die Arbeit von Kempe[2]), „Studien zum Barretter".

Hier stellt nun Kempe den Satz auf, daß die Dämpfung unabhängig vom Widerstand im Barretter und von der Wahl des Barretters ist. In seiner Arbeit S. 18 zieht er Resultate von O. Müller mit heran und findet, daß die mit dem Barretter gefundenen Dämpfungswerte identisch sind mit den Angaben des Thermoelementes und behauptet, daß die Dämpfungsmessung vom Indikator unabhängig sei. Er erklärt den Widerspruch gegen Neuhaus einmal, daß dieser den Barretterwiderstand in weit größeren Grenzen variieren konnte (hebt also zur Erklärung seine Behauptung auf) und zweitens, daß dieser mit bedeutend festeren Kopplungen arbeitete (was letzteres wohl den Ausschlag gab).

Zu der Gesamtheit der hier entstehenden Fragen will ich nun einige theoretische Bemerkungen machen; zu diesem Zwecke betrachten wir die Resonanzkurven (diese Zschr. **12**, 123, 1911, Fig. 1), wie sie entstehen bei Thermoelementen und dann bei Barrettern, um dann den Einfluß der Barretterschaltung auf diese kennen zu lernen. Alle bis jetzt durchgeführten Rechnungen setzen den Galvanometerausschlag bei Thermoindikatoren

$$a = c \int_0^{\infty} i^2 dt,$$

das ist also proportional der Wärmeentwicklung, wie sie im Meßinstrument stattfindet. Für Thermoelemente ist dies klar. Beim Barretter verläuft die Wirkung nun aber ganz anders. Der Barretter ist bekanntlich in einen Zweig einer Wheatstoneschen Brücke eingebaut und seine Belastung veranlaßt eine Widerstandsänderung, die dann ihrerseits einen Strom im Galvanometer hervorruft (Fig. 1).

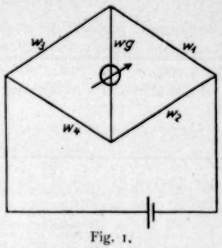


Fig. 1.

Es ist

$$i_g = \frac{w_4 w_1 - w_3 w_2}{(w_3 + w_4)(w_1 + w_2) + w_g (w_1 + w_2 + w_3 + w_4)} J.$$

Wird nun der Barretter, der in w_4 eingebaut ist, von einem zu messenden Strom getroffen, so tritt eine Temperaturänderung in demselben ein und diese veranlaßt eine Widerstandsänderung x, die ihrerseits das Brückengleichgewicht stört und im Galvanometer einen Ausschlag hervorruft, der proportional dem neuen i_g ist.

Es ergibt sich:

$$i_g = \frac{(w_4 + x)\, w_1 - w_3 w_2}{(w_3 + w_4 + x)(w_1 + w_2) + w_g (w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + x)} J.$$

Da aber zu Beginn der Untersuchung mit dem Barretter die Brücke ausgeglichen war, d. h.

$$i_g = 0$$

war, so war auch

$$w_4 w_1 = w_2 w_3,$$

woraus sich ergibt

$$i_g = \frac{w_1 x}{(w_1 + w_2 + w_g) x + (w_3 + w_4)(w_1 + w_2) + w_g (w_1 + w_2 + w_3 + w_4)} J.$$

i_g sind nun den Galvanometerausschlägen proportionale Größen im Barrettersystem, x die Widerstandsänderung, die proportional der Wärmemenge ist, also auch proportional der Thermoelektrizität, die ihrerseits im Galvanometer den Ausschlag hervorruft. Es sind also i_g und x den Ordinaten der Resonanzkurven proportionale Größen, zwischen denen nun obige Beziehung besteht

$$i_g = \frac{a x}{c x + d},$$

1) Th. Neuhaus, Mitteilungen der Physikalischen Versuchsstation Halle-Cröllwitz, Nr. 14. Halle, Kaemmerer, 1909.

2) W. Kempe, Mitteilungen der Physikalischen Versuchsstation Halle-Cröllwitz, Nr. 19; ein Auszug aus beiden: diese Zeitschr. 11, 331, 1910; Referat: Jahrbuch für drahtlose Telegraphie 4, 286, 1910.

wobei

$$a = w_1$$
$$c = w_1 + w_2 + w_g$$
$$d = (w_3 + w_4)(w_1 + w_2) + w_g(w_1 + w_2 + w_3 + w_4)$$

sind und

$$J = 1$$

gesetzt wird, da es ja nur eine gleichmäßige Dehnung der Kurven hervorruft, die bei Reduktion auf gleiche Maximalamplitude die Kurven in ursprünglicher Form wiedergibt.

Sollte aber zwischen den mit Thermoelement und Barretter aufgenommenen Kurven Identität für abzuleitende Größen bestehen, so müßte

$$i_g = Ax$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w_1 & 0 \\ w_1 + w_2 + w_g & (w_3 + w_4)(w_1 + w_2) + w_g(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Nun fragt es sich weiter, ob bei der Transformation Fixpunkte existieren, d. h. wird

$$x = \frac{ax}{cx + d}$$

befriedigt. Es ergibt sich hieraus

$$cx^2 + (d - a)x = 0$$
$$x_1 = 0$$

sein, eine Gleichung, die nur resultieren kann, wenn $c = 0$ ist, das bedeutet aber

$$w_1 + w_2 + w_g = 0,$$

was physikalisch unmöglich ist.

Die auftretende Transformation ist ein spezieller Fall der allgemeinen linearen Transformation, die auf Imaginäres ausgedehnt bei den hier in Betracht kommenden Koeffizienten den hyperbolischen Fall ergibt. Sind w und z imaginäre Größen, so sei

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

Verschwindet die Diskriminante, so liefert die Transformation einen Ausnahmefall; dies ist jedoch hier nicht möglich, da

$$x_2 = -\frac{d - a}{c}.$$

Fixpunkt $x_1 = 0$ sagt aber aus, daß, wenn keine Widerstandsänderung vorhanden ist, also auch kein Brückenstrom, auch im Thermoelement keine elektromotorische Kraft erzeugt wird. Für Stromlosigkeit haben beide Instrumente den Ausschlag Null.

$$x_2 = -\frac{d - a}{c} = -\frac{w_1 w_3 + w_1 w_4 + w_2 w_3 + w_2 w_4 + w_g(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) - w_1}{w_1 + w_2 + w_g}$$

ergibt eine sicher negative Größe, die physikalisch keine Bedeutung hat.

Wir kommen zur Transformation selbst, die wir in der Form

$$i_g = \frac{x}{\frac{c}{a}x + \frac{d}{a}}$$

schreiben; man sieht sofort, daß der Wert $\frac{c}{a}x$ ausschlaggebend ist für die Umgestaltung der Kurven; denn ist $\frac{c}{a}x$ so groß, daß wir $\frac{d}{a}$ daneben vernachlässigen können, so wird i_g konstant, die Kurven also unendlich verbreitert; tritt dagegen das Umgekehrte ein, daß $\frac{c}{a}x$ gegenüber $\frac{d}{a}$ vernachlässigt werden kann, so werden die reduzierten Kurven die ursprünglichen decken. Es kommt also bei der Barretterkonstruktion darauf an, cx klein gegen d zu machen.

Um nun numerisch auswerten zu können, müssen wir auf die Barretterkonstanten eingehen. H. Zöllich[1]) berechnet diejenige Anordnung und Abmessung der Widerstände in der Barretterschaltung, welche bei gleicher in den Barretter eingeleiteten Intensität den größten Galvanometerausschlag gibt, also das Optimum für Messungen. Ist

$$w_3 = m \cdot w_4$$
$$w_2 = n \cdot w_4,$$

so findet er es für

$$m = 0$$
$$n = \infty$$

d. h. wenn keine Brückenschaltung mehr vorhanden ist. Die numerische Auswertung ergab, daß bei

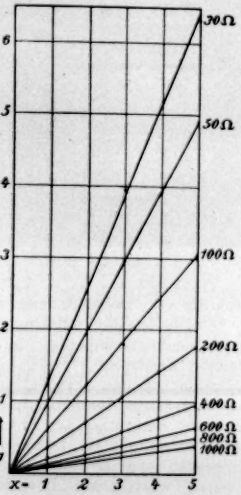
$m = 0{,}01$	$n = 100$	96 Proz.
$m = 0{,}1$	$n = 10$	82 „

des Maximalwertes ausgenutzt werden, letzteres bedeutet aber eine genügend hohe Ausnutzung des Maximalwertes der höchst erreichbaren Empfindlichkeit, zumal wenn man bedenkt, daß gegen eine Erhöhung von $m = 0{,}1$, $n = 10$ verschiedene technische Gründe sprechen. Mit diesen Zahlen will ich nun rechnen. Kempe und Neuhaus verwenden Barretter von zirka 30—1000 Ω; x sei gleich 1, 2, 3, 4, 5 Ω gesetzt, wobei letztere Größen sicher zu hoch gegriffen sind und $w_g = 30$ Ω.

1) Zöllich, Über die Empfindlichkeit von Barretteranordnungen. Mitteilungen aus der Physikali-chen Versuchsstation Halle-Cröllwitz, Nr. 21; und diese Zeit-chr. **10**, 899, 1909.

Es ergeben sich für i_g bei

w_4 =	30	50	100	200	400
$x = 1$	135	102	63,1	36	24
2	227	202	125	71	38
3	394	299	181	107	57
4	512	394	248	145	76
5	636	487	308	176	95



Angenähert $i_g = A \cdot x$ bei Barretterwiderständen von 30—100 Ω.

Fig. 2.

In Fig. 2 sind als Abszissen die x, als Ordinaten die i_g abgetragen und es zeigt sich, daß angenähert

$$i_g = Ax$$

ist, daß also Barretter und Thermoelement gleichwertig sind, abgesehen natürlich von der hier gar nicht zu betrachtenden Empfindlichkeit. Die ganze Angelegenheit ändert sich vollständig, sowie man Wärmestrahlung und Leitung durch die Stromzuführungsdrähte berücksichtigt; es lassen sich diese Verluste umgekehrt durch solche Messungen finden; bis jetzt existieren allerdings hierüber noch keine für numerische Berechnungen brauchbaren Angaben in der Literatur.

Dieser Satz über die Gleichwertigkeit der Messungen mit den beiden Instrumenten läßt sich aber nicht, wie es Kempe tut, dahin verallgemeinern, daß die Dämpfungsmessung überhaupt vom Indikator unabhängig ist.

Diese kurze Notiz bildete ursprünglich einen Paragraphen in meinen theoretischen Studien zum Barretter, die jedoch wegen der ziemlich umfangreichen Rechnungen in absehbarer Zeit nicht veröffentlicht werden können.

Zusammenfassung.

Die Widerstandsänderungen eines belasteten Barretters in der Brückenschaltung rufen Ausschläge des Brückengalvanometers hervor, deren Beziehung zum Belastungsstrom sich darstellen läßt durch die lineare Transformation

$$x' = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (b = 0).$$

Da aber bei den gebräuchlichen Anordnungen cx stets klein ist gegen d, so erhält man trotzdem analoge Werte wie beim Thermoelement.

Berlin-Charlottenburg.

(Eingegangen 22. Februar 1911.)

Die nicht achsensymmetrische Knickung dünnwandiger Hohlzylinder.

Von Rudolf Lorenz.

A. Knickung unter gleichmäßig verteiltem, axialen Druck.

Die Knickung eines dünnwandigen Hohlzylinders infolge der Einwirkung von Druckkräften auf seine Endflächen kann auf verschiedene Weise geschehen. Ist der Durchmesser des Zylinders klein im Verhältnis zu seiner Länge, so wird die Knickung nach der Eulerschen Theorie vor sich gehen: Der Zylinder knickt wie ein Stab von beliebigem Querschnitt derart aus, daß seine Achse sich angenähert als Sinus- oder Kosinuslinie darstellen läßt, wobei ebene Querschnitte, die vor der Verbiegnng senkrecht zur Achse des Stabes lagen, auch zur verbogenen Achse senkrecht und eben bleiben. Dieser Fall ist für eine Lagerung der Endflächen in Spitzen in Fig. 1 schematisch dargestellt.

Werden aber Länge und Durchmesser vergleichbar, oder wird die Wandstärke sehr klein im Verhältnis zum Durchmesser, so kann der Hohlzylinder auch derart knicken, daß seine Mittellinie gerade bleibt und nur die Wandungen sich unter entsprechender Dehnung in der Richtung des Umfanges ausbauchen. Hierbei verbiegt sich die Wandung derart, daß ihr Querschnitt in eine Sinuslinie übergeht, und Querschnitte des Hohlzylinders, die vorher zur Achse senkrecht lagen, deformieren sich in Kegelflächen mit der Spitze in der Zylinderachse. Derartige Knickungen, die als achsensymmetrisch

Fig. 1.

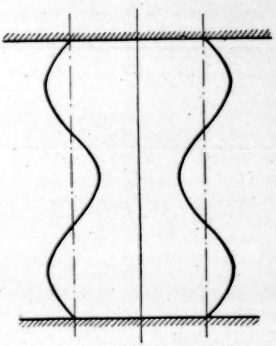


Fig. 2.

bezeichnet werden, sind wohl zuerst von Lilly[1]) beschrieben worden, während sie der Verfasser theoretisch untersuchte[2]). Fig. 2 zeigt einen derartigen Fall in schematischer Darstellung.

Die Ausknickung der Wandungen braucht aber durchaus nicht immer achsensymmetrisch zu erfolgen. Es ist vielmehr auch der Fall denkbar, daß sich die Wand an der einen Stelle ausbaucht, während sie an einer anderen Stelle desselben Querschnittes senkrecht zur Achse eingedrückt wird. Auf solche Knickerscheinungen ist in der Literatur zuerst von Mallock hingewiesen worden[3]), der sie jedoch nur kurz beschreibt, ohne den Versuch zu machen, die merkwürdigen Erscheinungen, wie sie z. B. Fig. 3 zeigt, zu erklären. Ganz in neuester Zeit hat sich gelegentlich der allgemeinen Besprechung von Stabilitätsproblemen der Elastizitätstheorie Timoschenko[4]) mit der nicht achsensymmetrischen Knickung von Hohlzylindern, wenn auch nur kurz befaßt, kommt jedoch, da er nur dehnungslose Deformationen betrachtet, zu keinem abschließendem Ergebnis.

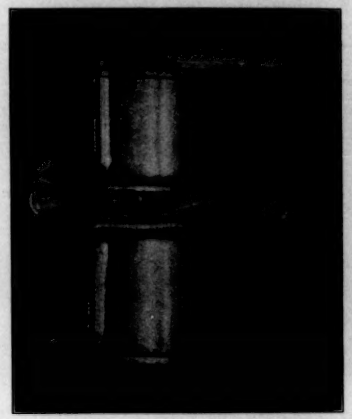


Fig. 3.

Im folgenden soll nun versucht werden, die Theorie der nicht achsensymmetrischen Knickung aufzustellen unter Benutzung der Theorie dünner Platten und Schalen, wie sie Love[1]) in seinem bekannten Werke gegeben hat. Die Ableitung dieser Theorie, wenn auch nur in der Beschränkung auf zylindrische Schalen, würde jedoch zuviel Raum in Anspruch nehmen. Es werden daher nur die Grundgleichungen und die Ausdrücke für die Biegungsmomente abgeleitet, und bezüglich der übrigen Entwickelungen auf das Lovesche Werk verwiesen. Ferner wurden im Anfange die Verschiebungen u in der Richtung der Achse als klein gegen die Verschiebungen v und w in Richtung des Umfanges bzw. des Radius vernachlässigt, während am Schlusse unserer Entwickelungen gezeigt wird, welches Resultat sich ergibt, wenn auf diese Vernachlässigung verzichtet wird. Endlich ist die Wandstärke $2h$ stets als klein gegen den Durchmesser $2r$ anzusehen.

1) Engineering 1908, S. 37.

2) Zeitschr. d. Ver. deut. Ing. 1908, S. 1706.

3) A. Mallock, Note on the Instability of Tubes etc. Proc. Royal Society, Series A, Vol. 81, No. A. 549, S. 388, 1908. Für den Hinweis auf die Wichtigkeit der nicht achsensymmetrischen Knickung bin ich Herrn Geh. Regierungsrat Prof. Dr. Ing. R. Krohn in Danzig zu besonderem Danke verpflichtet.

4) S. Timoschenko, Einige Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie, Zeitschrift für Mathematik und Physik, **58**, 337, 1910. In dieser sehr lesenswerten Abhandlung wird am Schlusse einer reichhaltigen Sammlung von Knickproblemen auch die nicht achsensymmetrische Knickung von Hohlzylindern kurz gestreift, und dabei unter der Voraussetzung, daß die Deformation bei der Knickung als dehnungslos angesehen werden kann, ein Ausdruck für die kleinste Knicklast angegeben, der in unseren Bezeichnungen lautet

$$-\frac{T_x''}{Eh} = \frac{12}{5}\cdot\frac{m^2}{m^2-1}\cdot\frac{h^2}{r^2}\left[\frac{4}{3}\frac{l^2}{r^2}+\frac{2(m-1)}{m}\right] \qquad (a)$$

Dieser Ausdruck ist mit Gl. (16a) zu vergleichen und hierbei folgt zunächst, daß für sehr großes r nach (a) $T_x'' = 0$ wird, statt daß, wie dies auch aus (16a) und (26) hervorgeht, in diesem Falle die Knicklast des Zylinders in die eines sehr langen Bleches übergeht. Ferner zeigt aber Gl. (a), daß für $l = \infty$ auch $T_x'' = \infty$ wird, und auch dies ist unmöglich. In Gl. (16a) tritt dies auch nicht ein, da in dieser Gleichung für $l = \infty$ auch $n = \infty$ einzusetzen ist, also T_x in diesem Falle einen endlichen Wert behält. Ganz abgesehen von den Einwendungen, die Timoschenko selbst gegen die Ableitung der Gl. (a) macht, scheint mir daher die Gleichung für die Berechnung der Knicklasten von Hohlzylindern nicht brauchbar zu sein.

1) A. E. H. Love, Lehrbuch der Elastizität, deutsch von A. Timpe, Leipzig 1907, S. 568 ff., insbesondere aber § 334 und § 337.

Wir betrachten nun ein aus der Wand des Hohlzylinders herausgeschnittenes Element $abcda'b'c'd'$ von der radialen Stärke $2h$, der Höhe dx und dem Öffnungswinkel $d\varphi$, dessen Zylinderflächen $aba'b'$ und $cdc'd'$ von Kräften frei sind. (Fig. 4.) Auf die Stirnflächen $abcd$

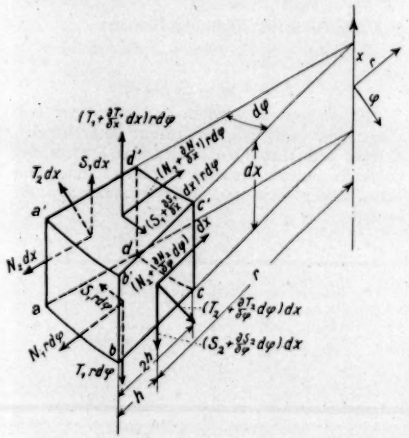


Fig. 4.

und $a'b'c'd'$ wirken dagegen Zugkräfte $T_1 r\,d\varphi$ bzw. $\left(T_1 + \frac{\partial T_1}{\partial x} dx\right) r\,d\varphi$ und Schubkräfte $S_1 r\,d\varphi$ und $N_1 r\,d\varphi$ bzw.

$$\left(S_1 + \frac{\partial S_1}{\partial x} dx\right) r\,d\varphi, \quad \left(N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial x} dx\right) r\,d\varphi,$$

während an den radialen Seitenflächen $aa'd'd$ und $bb'c'c$ die Kräfte $T_2 dx$, $N_2 dx$, $S_2 dx$, bezw.

$$\left(T_2 + \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} d\varphi\right) dx, \quad \left(N_2 + \frac{\partial N_2}{\partial \varphi} d\varphi\right) dx,$$
$$\left(S_2 + \frac{\partial S_2}{\partial \varphi} d\varphi\right) dx$$

angreifen. Alle diese Kräfte müssen sich nun an dem Element das Gleichgewicht halten und dies gibt uns für die Achsenrichtung die Gleichung

$$\left(T_1 + \frac{\partial T_1}{\partial x} dx\right) r\,d\varphi + S_2 dx - T_1 r\,d\varphi - \left(S_2 + \frac{\partial S_2}{\partial \varphi} d\varphi\right) dx = 0$$

oder

$$r \frac{\partial T_1}{\partial x} - \frac{\partial S_2}{\partial \varphi} = 0.$$

Die Gleichgewichtsbedingung gegen Verschieben in der Richtung des Umfanges lautet, unter Berücksichtigung der in die Richtung φ fallenden Komponenten von N_2 und $N_2 + \frac{\partial N_2}{\partial \varphi} d\varphi$ (vgl. Fig. 5).

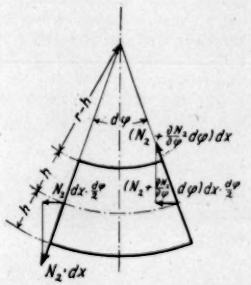


Fig. 5.

$$\left(T_2 + \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} d\varphi\right) dx + \left(S_1 + \frac{\partial S_1}{\partial x} dx\right) r\,d\varphi - T_2 dx - S_1 r\,d\varphi - \left(N_2 + \frac{\partial N_2}{\partial \varphi} d\varphi\right) dx \frac{d\varphi}{2} - N_2 dx \frac{d\varphi}{2} = 0$$

oder nach Streichung aller von höherer Ordnung kleinen Glieder

$$\frac{\partial T_2}{\partial \varphi} + r \frac{\partial S_1}{\partial x} - N_2 = 0.$$

Endlich erhalten wir noch für die in der Richtung des Radius fallenden Kräfte die Bedingung

$$\left(N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial x} dx\right) r\,d\varphi + \left(N_2 + \frac{\partial N_2}{\partial \varphi} d\varphi\right) dx - N_1 r\,d\varphi - N_2 dx + T_2 dx\,d\varphi + T_1 r\,d\varphi\,d\tau = 0$$

oder

$$r \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial \varphi} + T_2 + r T_1 \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0,$$

wobei zu beachten war, daß bei der Verbiegung auch eine Komponente der Axialspannung, nämlich $T_1 r\,d\varphi\,d\tau$, in die Richtung des Radius fällt. Unter $d\tau$ wurde in diesem Ausdrucke der Kontingenzwinkel des Schnittes der verbogenen Wandfläche mit einer durch die Zylinderachse gelegten Ebene verstanden (Fig. 6), während

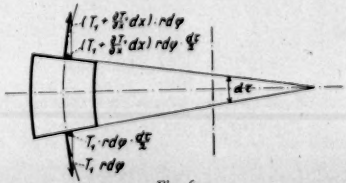


Fig. 6.

noch besonders darauf hinzuweisen ist, daß alle Kräfte T_1, T_2, usw. sich auf eine Fläche von der Breite $2h$ und der Länge 1 beziehen.

Zu diesen drei Verschiebungsgleichungen treten noch die Gleichgewichtsbedingungen gegen Verdrehen um drei zueinander senkrechte Achsen. Dies Verdrehen wird bewirkt durch die Biegungsmomente G_1 und G_2, die Torsionsmomente H_1 und H_2, und durch die Schubkräfte N_1, N_2, S_1 und S_2 (Fig. 7), wobei die

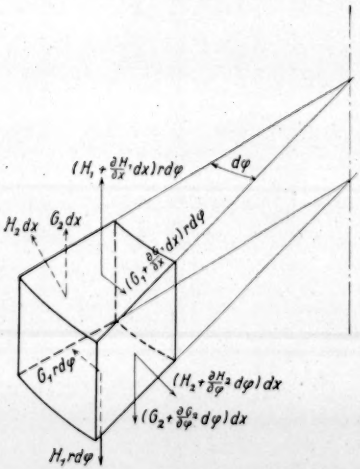


Fig. 7.

Indizes 1 und 2 sich wieder auf die Grundflächen $abcd$ bzw. auf die Seitenflächen $aa'd'd$ und die Momente sowohl wie vorher die Kräfte sich auf die entsprechenden Flächen von der Breite $2h$ und der Einheit als Länge beziehen. Die Gleichgewichtsbedingungen gegen Verdrehen lauten nun:

1. für eine Achse in der Richtung von φ, welche also den Grundkreis des Zylinders berührt

$$\left(G_1+\frac{\partial G_1}{\partial x}dx\right)rd\varphi+\left(H_2+\frac{\partial H_2}{\partial\varphi}d\varphi\right)dx-$$
$$-N_1rd\varphi\cdot dx-G_1rd\varphi-H_2dx=0$$

oder

$$r\frac{\partial G_1}{\partial x}+\frac{\partial H_2}{\partial\varphi}-rN_1=0;$$

2. für eine Achse parallel zur Zylinderachse

$$\left(G_2+\frac{\partial G_2}{\partial\varphi}d\varphi\right)dx+H_1rd\varphi-G_2dx-$$
$$-\left(H_1+\frac{\partial H_1}{\partial x}dx\right)rd\varphi-N_2dx\cdot rd\varphi=0$$

oder

$$\frac{\partial G_2}{\partial\varphi}-r\frac{\partial H_1}{\partial x}-N_2=0;$$

3. für eine Achse in der Richtung des Radius, wobei zu beachten ist, daß die beiden Momente H_2dx und $\left(H_2+\frac{\partial H_2}{\partial\varphi}d\varphi\right)dx$ eine Komponente $H_2dxd\varphi$ in dieser Richtung besitzen

$$H_2dxd\varphi+S_2dx\cdot rd\varphi+S_1rd\varphi dx=0$$

oder

$$H_2+r(S_1+S_2)=0.$$

Die soeben entwickelten 6 Beziehungen zwischen den am Zylinderelement angreifenden Kräften und Momenten stellen das System der Grundgleichungen unseres Problems dar und sollen daher hier nochmals zusammengefaßt werden

$$\left.\begin{aligned} r\frac{\partial T_1}{\partial x}-\frac{\partial S_2}{\partial\varphi}&=0\\ \frac{\partial T_2}{\partial\varphi}+r\frac{\partial S_1}{\partial x}-N_2&=0\\ r\frac{\partial N_1}{\partial x}+\frac{\partial N_2}{\partial\varphi}+T_2+rT_1\frac{\partial\tau}{\partial x}&=0\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

$$\left.\begin{aligned} r\frac{\partial G_1}{\partial x}+\frac{\partial H_2}{\partial\varphi}-rN_1&=0\\ \frac{\partial G_2}{\partial\varphi}-r\frac{\partial H_1}{\partial x}-N_2&=0\\ H_2+r(S_1+S_2)&=0\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

Durch die Gleichungen (2) werden die Schubkräfte N_1 und N_2, sowie die Summe der beiden Schubkräfte S_1 und S_2 durch die Momente G_1, G_2, H_1 und H_2 ausgedrückt. Wir suchen nun die Ausdrücke der Momente in den Verschiebungen v und w und wollen für die Biegungsmomente G_1 und G_2 die Ableitung der betreffenden Ausdrücke geben. Bezeichnen wir die Biegungsspannung in der Richtung der Zylinderachse mit σ_x, in der Richtung des Umfanges mit σ_t, ferner mit ε_x und ε_t die entsprechenden Dehnungen, mit m das Verhältnis von Längs- zu Querdehnung und endlich mit E den Elastizitätsmodul, so haben wir bekanntlich

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\frac{m^2}{m^2-1}E\left(\varepsilon_x+\frac{1}{m}\varepsilon_t\right)\\ \sigma_t&=\frac{m^2}{m^2-1}E\left(\varepsilon_t+\frac{1}{m}\varepsilon_x\right)\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

Sind aber ϱ_x und ϱ_t die Krümmungsradien der elastischen Fläche nach der Deformation, und ist weiter y der Abstand eines Elementes in der Wand des Hohlzylinders von dieser Fläche (Fig. 8), so wird

$$\varepsilon_x=y\frac{\partial\tau}{\partial x},\quad \varepsilon_t=\frac{y}{r}\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}.$$

Mit $d\varphi_1=d\varphi+\Delta d\varphi$ ist aber nach Fig. 8

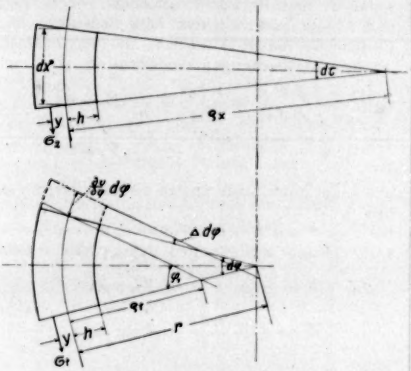


Fig. 8.

$$\varrho_t d\varphi + \varrho_t \Delta d\varphi = r\,d\varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi} d\varphi$$

also

$$\frac{\Delta d\varphi}{r\,d\varphi} = \frac{1}{\varrho_t} - \frac{1}{r} + \frac{1}{\varrho_t r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}$$

oder mit

$$\frac{1}{\varrho_t} - \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}$$

und mit

$$\frac{1}{\varrho_t r} \backsim \frac{1}{r^2}$$

$$\frac{\Delta d\varphi}{r\,d\varphi} = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\right).$$

Daraus folgt aber

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_t &= \frac{y}{r^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\right) \\ \varepsilon_x &= y\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

wobei sich der Ausdruck für ε_x in ganz analoger Weise ergibt, wie der von ε_t. Führen wir (4) in (3) ein, so ergibt sich

$$\sigma_x = \frac{m^2}{m^2-1} E\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{m}\cdot\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)\right] y$$

und daraus wird mit

$$G_1 = -\int_{-h}^{+h} \sigma_x\, y\, dy$$

$$\left.\begin{aligned} G_1 &= -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{m}\cdot\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)\right] \\ G_2 &= -D\left[\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\right) + \frac{1}{m}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right] \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

wobei unter

$$D = \frac{2}{3} E h^3 \frac{m^2}{m^2-1} \tag{6}$$

die sogenannte Biegungssteifigkeit verstanden wird.

In ähnlicher Weise, die Entwickelung würde hier zu weit führen, ergibt sich für die Torsionsmomente der Ausdruck

$$H_1 = -H_2 = D\frac{m-1}{m}\cdot\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} + v\right) \tag{7}$$

und weiter

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} D\frac{m-1}{m}\left[\left(\frac{3}{h^2} + \frac{1}{r^2}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial \varphi}\right] \\ T_2 &= -D\frac{3}{h^2 r}\left(w - \frac{\partial v}{\partial \varphi}\right) \\ \frac{\partial \tau}{\partial x} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Führen wir nun (5) und (7) in (2) ein, so folgt

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial \varphi}\right) \\ N_2 &= -D\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3} + \frac{1}{r}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial \varphi} + \frac{m-1}{m}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

und dies gibt weiter mit (1) und (8)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^4}\frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} + \frac{3}{h^2 r^2} w - \frac{T_1}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{2m-1}{m}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\,\partial \varphi} + \frac{1}{r^4}\frac{\partial^3 v}{\partial \varphi^3} - \frac{3}{h^2 r^2}\frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0 \\ &\frac{3m-1}{2m}\cdot\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial \varphi} + \frac{1}{r^4}\frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3} - \frac{3}{h^2 r^2}\frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{m-1}{2m}\frac{3}{h^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{3}{h^2 r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

die Gleichungen, denen die Verschiebungen v und w genügen müssen. Hierin bedeutet nunmehr T_1 die axiale Belastung des Hohlzylinders pro cm des Umfanges, die wir in der Folge als konstant betrachten können. Die erste der Gleichungen (1), die zur Bestimmung der Veränderungen von T_1 dienen kann, scheidet damit aus der weiteren Betrachtung aus.

Die Ausdrücke für die Deformationen, welche den beiden Gleichungen (10) genügen, müssen nun so beschaffen sein, daß v und w für $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$ die gleichen Werte annehmen.

Ein Integral der beiden Gleichungen, das dieser Bedingung genügt, ist

$$\left.\begin{aligned} v &= V\cos\nu\varphi \\ w &= W\sin\nu\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^4w}{dx^4} - \frac{2\nu^2}{r^2}\frac{d^2w}{dx^2} + \left(\frac{\nu^2}{r^4} + \frac{3}{h^2r^2}\right)W - \frac{T_1}{D}\frac{d^2W}{dx^2} \\ &\frac{3m-1}{2m}\frac{\nu}{r^2}\frac{d^2W}{dx^2} - \left(\frac{\nu^3}{r^4} + \frac{3\nu}{h^2r}\right)W + \frac{m-1}{2m}\cdot\frac{3}{h^2}\frac{d^2V}{dx^2} - \frac{3\nu^2}{h^2r^2}V = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

an, von welcher wir bei den folgenden Betrachtungen ausgehen wollen.

Von den vielen, bei auf Knickung beanspruchten Rohren möglichen Fällen haben zwei besondere praktische Bedeutung: Erstens der Fall der freien Auflagerung der Enden und zweitens der Fall der eingespannten Enden. Im ersten Falle wäre es nun einmal möglich, daß der Zylinder auf seinen Auflageflächen gleitet, was jedoch der großen spezifischen Flächenpressung halber nur bei besonders dafür geschmierten Endflächen eintreten wird. Bei ungeschmierten Endflächen wird andererseits ein solches Gleiten ausgeschlossen sein, und diesen wohl am häufigsten auftretenden Fall wollen wir zunächst behandeln.

1. Fall. Freie Enden ohne Gleitung in den Auflageflächen.

Der Hohlzylinder ist im vorliegenden Falle so gelagert, daß sich seine Wandung wohl in einen beliebigen Winkel zu den Auflageflächen stellen kann, ohne aber auf letzteren zu gleiten. Bezeichnen wir die axiale Länge des Zylinders wobei V und W nur Funktionen von x sind und ν eine positive ganze Zahl bedeutet. Mit Einführung dieser Ausdrücke in (10) nehmen die beiden Gleichungen die Form

mit l, so lauten also unsere Grenzbedingungen hier

für $x = 0$ und $x = l$ muß $v = 0$, $w = 0$, $G = 0$ sein. Diesen Bedingungen genügt der Ansatz

$$\left.\begin{aligned} V &= B\sin\frac{n\pi x}{l} = B\sin\mu x \\ W &= A\sin\frac{n\pi x}{l} = A\sin\mu x \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

worin

$$\mu = \frac{n\pi}{l},$$

n wieder eine positive ganze Zahl ist und die Konstanten A und B voneinander abhängig sind. Führen wir (13) in (12) ein, so erhalten wir zunächst aus der zweiten Gleichung (12) für B

$$B = -\nu\,\frac{\dfrac{3m-1}{2m}\cdot\dfrac{\mu^2}{r^2} + \dfrac{\nu^2}{r^4} + \dfrac{3}{h^2r^2}}{\dfrac{3}{h^2}\left(\dfrac{m-1}{2m}\mu^2 + \dfrac{\nu^2}{r^2}\right)}\cdot A \qquad (14)$$

und damit weiter aus der ersten Gl. (12) nach Elimination von A und B

$$\begin{aligned} &\frac{3}{h^2}\cdot\frac{m-1}{2m}\mu^6 + \frac{2m-1}{m}\cdot\frac{3}{h^2}\frac{\mu^4\nu^2}{r^2} + \mu^2\left\{\frac{5m-1}{2m}\frac{\nu^4}{r^4} + \frac{7m-3}{2m}\frac{\nu^2}{r^2} + \frac{m-1}{2m}\cdot\frac{3}{h^2}\right\}\frac{3}{h^2r^2} \\ &+ \frac{3}{h^2}\frac{\nu^4}{r^6}(\nu^2-2) + \frac{T_1}{D}\frac{3}{h^2}\mu^2\left(\frac{m-1}{2m}\mu^2 + \frac{\nu^2}{r^2}\right) = 0. \end{aligned} \qquad (15)$$

Die Auflösung dieser Gleichung nach T_1 führt uns auf den folgenden Ausdruck für die Knickbelastung

$$\begin{aligned} -\frac{T_1}{D} = \Bigg\{&\mu^2\left(\frac{m-1}{2m}\mu^2 + \frac{2m-1}{m}\frac{\nu^2}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{5m-1}{2m}\frac{\nu^4}{r^2} - \frac{7m-3}{2m}\frac{\nu^2}{r^2} + \frac{m-1}{2m}\frac{3}{h^2}\right) \\ &+ \frac{\nu^4}{\mu^2r^6}(\nu^2-2)\Bigg\}\frac{1}{\dfrac{m-1}{2m}\mu^2 + \dfrac{\nu^2}{r^2}}, \end{aligned} \qquad (16)$$

den wir durch Umformung noch in

$$-\frac{T_1}{Eh} = \frac{2}{3}\frac{m^2}{m^2-1}\left\{\frac{n^2\pi^2h^2}{l^2} + \frac{h^2}{r^2}\left[2\nu^2 + \frac{\nu^2(\nu^2-2)}{\dfrac{n^2\pi^2r^2}{l^2}} + \frac{3\dfrac{m-1}{2m}\cdot\dfrac{r^2}{h^2} - \dfrac{5m-1}{2m}\nu^2}{\dfrac{m-1}{2m}\dfrac{n^2\pi^2r^2}{l^2} + \nu^2}\right]\right\} \qquad (16a)$$

vereinfachen können.

Jedes T_1, das dieser Gleichung genügt, stellt eine Knicklast des Hohlzylinders dar, unter deren Einfluß also die Deformationen des Zylinders dauernd wachsen, bis schließlich der Zusammenbruch erfolgt. Man erkennt diesen Charakter von T_1 am besten, wenn man in (12)

$$W = A\sin\frac{n\pi x}{l} + W_0,$$

wobei $W_0 = A_0 \sin \mu_0 x$ eine schon im Anfang vorhandene geringe Abweichung des Mantels von der genauen Zylinderform darstellt. Entfernt man dann aus den so erhaltenen beiden Gleichungen B, so erhält man für A einen Ausdruck, in dessen Nenner die linke Seite der Gleichung (15) steht. Mit einem Werte von T_1 nach Gl. (16a) verschwindet aber dieser Nenner, so daß dafür A und damit auch die Deformationen des Zylinders unendlich werden. Also stellen die nach Gl. (16a) ermittelten Werte von T_1 tatsächlich Knicklasten des Hohlzylinders dar.

Solcher Knicklasten gibt es nun zweimal unendlich viele, da in (16a) jedes positive ganzzahlige Wertepaar n und ν eingehen kann, solange

$$n \geq 1 \quad \text{und} \quad \nu > 0$$

ist. Diese Bedingung ergibt sich aus der Überlegung, daß in der Längsrichtung des Zylinders beim Ausknicken der Wand mindestens eine Ausbauchung vorhanden sein muß, während in der Richtung des Umfanges eine derartige Beschränkung nicht vorhanden ist.

Von den zweimal unendlich vielen Knicklasten des Hohlzylinders interessieren uns nun aber nur die kleinstmöglichen, und zu deren Aufsuchung greifen wir auf Gl. (16a) zurück, die wir nach Einführung von

$$\frac{n^2 \pi^2 r^2}{l^2} = \mu_1^2 \tag{17}$$

in folgende Form bringen können:

$$-\frac{T_1}{Eh} = \frac{2}{3}\frac{m^2}{m^2-1}\frac{h^2}{r^2}\left|\mu_1^2 + 2\nu^2 + \frac{\nu^2(\nu^2-2)}{\mu_1^2} + \frac{3\dfrac{m-1}{2m}\dfrac{r^2}{h^2} - \dfrac{5m-1}{2m}\nu^2}{\dfrac{m-1}{2m}\mu_1^2 + \nu^2}\right|. \tag{16b}$$

Hieraus bilden wir jetzt die Differentialquotienten von $-T_1$ nach ν^2 und μ_1^2, und setzen diese gleich Null. Wir finden so

$$-\frac{\partial}{\partial(\nu^2)}\left(\frac{T_1}{Eh}\right) = \frac{2}{3}\frac{m^2}{m^2-1}\frac{h^2}{r^2}\left|2 + 2\frac{\nu^2-1}{\mu_1^2} - \frac{\dfrac{5m-1}{2m} - 3\dfrac{\dfrac{m-1}{2m}\dfrac{r^2}{h^2} - \dfrac{5m-1}{2m}\nu^2}{\left(\dfrac{m-1}{2m}\mu_1^2 + \nu^2\right)^2}}{\dfrac{m-1}{2m}\mu_1^2 + \nu^2}\right| = 0$$

$$-\frac{\partial}{\partial(\mu_1^2)}\left(\frac{T_1}{Eh}\right) = \frac{2}{3}\frac{m^2}{m^2-1}\frac{h^2}{r^2}\left|1 - \frac{\nu^2(\nu^2-2)}{\mu_1^2} - \frac{3\dfrac{m-1}{2m}\dfrac{r^2}{h^2} - \dfrac{5m-1}{2m}\nu^2}{\left(\dfrac{m-1}{2m}\mu^2 + \nu^2\right)^2}\cdot\frac{m-1}{2m}\right| = 0 \tag{18}$$

und ein Wertepaar μ_1^2 und ν^2, das diesen beiden Gleichungen genügt, ergibt uns mit (16b) die bei einem bestimmten Werte des Verhältnisses $\frac{r}{h}$ kleinstmögliche Knicklast $-T_1$. Eine Auswertung dieser Gleichungen in geschlossener Form scheitert leider daran, daß die Bestimmungsgleichungen für ν^2 bzw. μ_1^2 von 6 bzw. 8 Grade werden. Wir sind daher zur numerischen Auflösung der Gl. (18) gezwungen und eliminieren aus ihnen zunächst $\frac{r^2}{h^2}$. Nach Einführung von

$$\lambda = \frac{\mu_1^2}{\nu^2} = \frac{n^2}{\nu^2}\cdot\frac{\pi^2 r^2}{l^2} \tag{19}$$

ergibt sich dabei

$$\nu^2 = \frac{\dfrac{m-1}{m}\cdot\dfrac{1}{\lambda^2} + \dfrac{2}{\lambda^2} + \dfrac{\dfrac{5m-1}{2m}\cdot\dfrac{m-1}{2m}}{\dfrac{m-1}{2m}\lambda + 1}}{\dfrac{m-1}{m}\cdot\dfrac{1}{\lambda} + \dfrac{1}{\lambda^2} - \dfrac{1}{m}} \tag{20}$$

eine Beziehung, welche die Abhängigkeit zwischen der Anzahl der Wellen auf der Zylinderlänge von der Wellenzahl auf den Umfang angibt. Der Nenner dieser Gleichung verschwindet, mit

$$\lambda = m$$

und daraus folgt mit $m = \frac{10}{3}$, da für $\lambda > m$ den Nenner negativ und damit ν^2 imaginär würde, daß stets

$$\frac{n}{\nu} < \frac{\sqrt{m}}{\pi}\cdot\frac{l}{r} = 0{,}581\,\frac{l}{r}$$

sein muß. Wir bestimmen nunmehr aus Gl. (20) für verschiedene Werte von λ die entsprechenden Werte von ν, und führen die so erhaltenen zusammengehörigen $(\lambda,\ \nu)$ in die zweite Gl. (18) ein. Aus der sich dann ergebenden Beziehung ermitteln wir weiter $\frac{r}{h}$ und finden nach Einsetzung der Wertegruppen $\left(\frac{r}{h},\ \lambda,\right)$ in Gl. (16b) endlich die gesuchten kleinsten Knicklasten $-T_{min}$. Das Resultat der Rechnung ist in der

Tabelle I.

	λ	1,8	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3	3,1	3,2	3,24	3,28	3,3	3,31	3,32	3,33
	ν	1,95	2,11	2,29	2,57	2,92	3,48	4,42	5,27	6,89	8,53	11,48	13,99	16,42	19,80	29,4
	$\frac{r}{h}$	9,9	12,03	14,35	19,25	25,63	37,7	62,8	90,6	148	217	444	663	932	1325	2944
	$-\frac{T_1}{Eh}$	0,228	0,191	0,158	0,143	0,0908	0,0633	0,0385	0,0267	0,01498	0,0123	0,00548	0,00349	0,00261	0,00183	0,000823
	$\frac{nr}{l}$	0,833	0,952	1,078	1,268	1,497	1,856	2,44	2,96	3,97	4,87	6,63	8,10	9,39	11,46	17,13
n für	$\frac{r}{l} = 5$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1,34	1,62	1,88	2,29	3,43
	1	1	1	1,078	1,268	1,497	1,856	2,44	2,96	3,97	4,78	6,63	8,10	9,39	11,46	17,13
	0,5	1,67	1,90	2,16	2,54	2,99	3,71	4,90	5,90	7,90	9,6	13,4	16,2	18,8	22,9	34,3
	0,1	8,33	9,52	10,78	12,68	14,97	18,56	24,4	29,6	39,7	47,8	66,3	81,0	93,9	114,6	171,3
	0,05	16,7	19,0	21,6	25,4	29,9	37,1	49,0	59,0	79	96	134	162	188	229	343
	0,01	83,3	95,2	107,8	126,8	149,7	185,6	244	296	397	478	663	810	939	1146	1713

Tabelle I wiedergegeben und im Diagramm Fig. 9 graphisch dargestellt. Wie sich auch schon aus den drei Gleichungen (16b) und (18) erkennen läßt, ergibt sich dabei die merkwürdige Tatsache, daß die kleinste Knicklast nur vom Verhältnisse des Radius zur halben Wandstärke, $\frac{r}{h}$ oder was dasselbe ist, vom Verhältnisse des Durchmessers zur Wandstärke abhängt.

Die unter der Einwirkung der kleinsten Knicklasten auftretenden Anzahl ν von Wellen auf dem Umfange des Hohlzylinders ist in Fig. 10 in Abhängigkeit von $\frac{r}{h}$ dargestellt, und in derselben Figur ist auch die Zahl n der (halben) Wellen in der Längsrichtung des Zylinders eingetragen. Da n nach Gl. (19) auch noch von

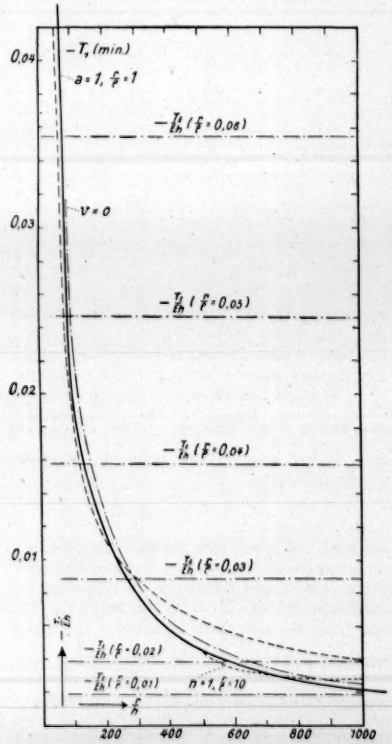


Fig. 9.

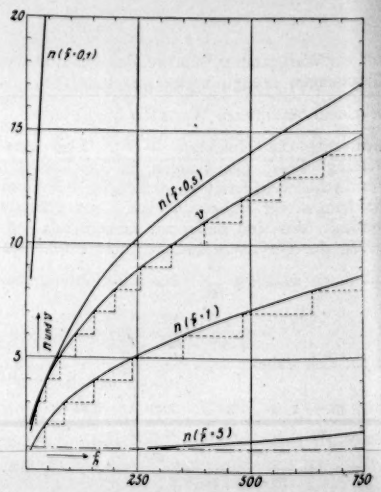


Fig. 10.

Tabelle II.

	$\frac{r}{h}$		20	40	60	80	100	150	200	250	300	400	500	600	800	1000
$n=1$	$\frac{r}{l}=1$	ν	1,144	2,58	3,48	4,08	4,62	5,37	6,17	6,77	7,26	8,11	8,82	9,42	10,45	11,75
	"	$-\frac{T_1}{Eh}$	0,182	0,050	0,033	0,9257	0,011	0,0150	0,012	0,00976	0,00914	0,0074	0,00635	0,0058	0,00456	0,00392
$n=2$	$\frac{r}{l}=10$	ν	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	196	17,8	25,9
	"	$-\frac{T_1}{Eh}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,0044	0,00296	0,00284
$\nu=0$		$-\frac{T_1}{Eh}$	0,127	0,0634	0,0423	0,0318	0,0254	0,0169	0,0127	0,0101	0,00847	0,00634	0,00508	0,00423	0,00318	0,00254
$\nu=2$		$-\frac{T_1}{Eh}$	0,119	0,612	0,0416	0,0314	0,0259	0,0168	0,0126	0,0101	0,00842	0,00623	0,00507	0,00422	0,00314	0,00260

Tabelle III.

$\mu_1=\frac{n\pi r}{e}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
$\frac{r}{h}$	3,48	4,35	7,07	11	16,18	24,6	29,9	38,9	48,4	59,4	122	231	367	522
$-\frac{T_1}{Eh}$	0,205	0,49	0,346	0,223	0,154	0,1115	0,084	0,0642	0,0523	0,0427	0,0225	0,01105	0,00682	0,00486

$\frac{r}{l}$ abhängt, so ergibt sich für jedes $\frac{r}{l}$ eine besondere Kurve, und alle diese Kurven hören bei $n=1$ auf. Es mag an dieser Stelle bemerkt werden, daß selbstverständlich in Wirklichkeit nur ganzzahlige ν und n auftreten können, so daß statt der stetigen Kurven für ν und n treppenförmige erscheinen würden, wie sie für ν und $\frac{r}{l}=1$ auch eingetragen wurden. Es erschien indessen richtiger, die stetigen Kurven aufzuzeichnen, da sich aus diesen leicht die oberen und unteren ganzzahligen Werte für ν und n ermitteln lassen, mit deren Kenntnis aus (16b) dann ohne weiteres $-T_{\min}$ folgt.

Ist nun aus Fig. 10 $n=1$ ermittelt worden, so bestimmt sich ν und damit auch $-T_1$ nicht mehr aus den beiden Gleichungen (18), sondern nur aus der ersten. Diese wird dann nach ν aufzulösen sein, und dies gelingt, da sie in ν^2 vom dritten Grade ist. Leider sind die so entstehenden Beziehungen recht unübersichtlich, und sollen aus diesem Grunde hier auch nicht wiedergegeben werden. Auch ihre numerische Auswertung ist dadurch recht erschwert, daß sowohl ν^2 als auch $-T_1$ in diesem Falle außer von $\frac{r}{h}$ auch noch von $\frac{r}{l}$ abhängen. Es wurde daher die Bestimmung der kleinsten Knicklast $-T_{1\,(n=1)}$ nur für zwei Werte des Verhältnisses $\frac{r}{l}$ ausgeführt und die Ergebnisse in Tabelle II wiedergegeben. Außerdem sind die Werte von $-T_{1\,(n=1)}$ in Fig. 9 eingetragen. Man erkennt, daß für kleinere Werte von $\frac{r}{h}$ die Knicklasten $-T_{1\,(n=1)}$ nicht unwesentlich kleiner werden, als die aus den beiden Gl. (18) ermittelten $-T_{\min}$.

Zwei Fälle bedürfen noch einer besonderen Untersuchung, und zwar sind dies die Fälle $\nu=1$ und $\nu=0$. Im Falle $\nu=1$ treten, wie sich leicht zeigen läßt, Wellen auf dem Umfange des Hohlzylinders nicht auf, der kreisförmige Querschnitt bleibt vielmehr erhalten, nur erscheint sein Mittelpunkt, entsprechend der Ausknickung in der Längsrichtung verschoben. Daher treten in diesem Fall im Hohlzylinder Biegungsmomente auf, und es ist nicht ohne weiteres möglich, die unseren Entwickelungen zugrunde liegende Voraussetzung, daß die axiale Belastung des Hohlzylinders $T_1=\text{const}$ sei, aufrecht zu erhalten. Dies ist vielmehr nur möglich, wenn die Höhe des Hohlzylinders nicht groß ist im Verhältnis zum Radius, wenn also der Zylinder weit genug von der Eulerschen Knicklast entfernt ist. Unter Beachtung dieser Voraussetzung sind die in Tabelle III zusammengestellten Werte der Knicklasten $-T_{1\,(\nu=1)}$ für $\nu=1$ zu benutzen. Die Werte ergaben sich aus der zweiten Gleichung (18) mit (16b).

Im Falle $\nu=0$ endlich bilden sich auf dem Umfange überhaupt keine Wellen und die Deformation des Hohlzylinders verläuft dann

achsensymmetrisch. Der Fall ist bereits untersucht worden[1]) und soll daher hier nur kurz gestreift werden, weil damals der Einfluß der Querkontraktion nicht berücksichtigt werden konnte. Aus der zweiten Gl. (18) ergibt sich mit $\nu = 0$

$$\mu_1^2 = \sqrt{3}\,\frac{r}{h}, \quad n = \frac{\sqrt[4]{3}}{\pi}\,\frac{l}{\sqrt{rh}} \tag{21}$$

und damit aus (16b)

$$-\frac{T_1(\nu=0)}{Eh} = \frac{4}{3}\,\frac{m^2}{m^2-1}\cdot\frac{h}{r}. \tag{22}$$

Beide Gleichungen sind mit den Gl. (24) und (25) des erwähnten Aufsatzes identisch. Der Vollständigkeit halber sind in Tabelle II für verschiedene Werte $\frac{r}{h}$ die zugehörigen Knicklasten angegeben und auch in Fig. 10 eingetragen.

Ein besonderes Interesse bietet noch die Untersuchung des Falles $\nu = 2$. Es wird hierfür aus der zweiten Gleichung (18)

$$\mu_1^2 = \frac{2m}{m-1}\left\{-4 + \sqrt{\frac{m-1}{2m}\left(3\,\frac{m-1}{2m}\,\frac{r^2}{h^2} - 2\,\frac{5m-1}{m}\right)}\right\} \tag{23}$$

und damit aus (16b)

$$-\frac{T_1(\nu=2)}{Eh} = \frac{8}{3}\,\frac{m^2}{m^2-1}\cdot\frac{m}{m-1}\,\frac{h^2}{r^2}\left\{2\,\frac{2m-1}{m} - 4 + \sqrt{\frac{m-1}{2m}\left(3\,\frac{m-1}{2m}\,\frac{r^2}{h^2} - 2\,\frac{5m-1}{m}\right)}\right\} \tag{24}$$

$$\backsim \frac{4}{\sqrt{3}}\,\frac{m^2}{m^2-1}\cdot\left(\frac{h}{r} - \frac{3{,}2\,h^2}{\sqrt{3}\,r^2}\right).$$

Die sich hieraus für verschiedene Werte von $\frac{r}{h}$ ergebenden kleinsten Knicklasten sind in Tabelle II enthalten. Wie daraus hervorgeht, schmiegt sich die Kurve der $-T_{1(\nu=2)}$ eng an die $-T_{1\,\min}$ an, namentlich bei höheren Werten von $\frac{r}{h}$ und nähert sich an diesen Stellen auch der Kurve der $-T_{1(\nu=0)}$ außerordentlich, so daß etwa für $\frac{r}{h} = 40$ für überschlägige Rechnungen Gl. (24) zur Bestimmung der Knicklast verwendet werden kann.

Nach den bisherigen Entwickelungen sind wir nun imstande, für einen dünnwandigen Hohlzylinder mit freien Enden unter Benutzung der Tabellen I bis III und der Fig. 9 und 10 die kleinsten Knicklasten anzugeben, und haben nur noch das hier behandelte Gebiet der Knikkung durch Ausweichen der Wandung von dem Gebiete der Eulerschen Knickung abzugrenzen. Schreiben wir den bekannten Ausdruck für die Eulersche Knicklast in der Form

$$-\frac{T_E}{Eh} = \frac{\pi^2 r^2}{l^2}\left(1 + \frac{h^2}{r^2}\right), \tag{25}$$

so erkennen wir, daß für einigermaßen beträchtliche Werte von $\frac{r}{h}$ der Klammerwert in 1 übergeht, also $-T_E$ von $\frac{r}{h}$ nahezu unabhängig wird. Damit erscheinen aber in Fig. 9 die Kurven der $-T_E$ als Parallele zur Achse der $\frac{r}{h}$ und sind als solche auch eingetragen.

Man erkennt, daß für größere Werte von $\frac{r}{l}$ die Knicklast $-T_{1\,\min}$ beträchtlich kleiner wird als die Eulersche, während sich für kleinere und kleinste $\frac{r}{l}$ das Verhältnis umkehrt.

Wächst nun bei dem Hohlzylinder der Radius r im Verhältnis zu h und auch zu l immer weiter, so können wir in Gl. (16a) den unter der Klammer stehenden Faktor von $\frac{h^2}{r^2}$ vernachlässigen. Wir erhalten dann als Knicklast im Grenzfalle $r = \infty$ mit $n = 1$

$$-\frac{T_1(r=\infty)}{Eh} = \frac{2}{3}\,\frac{m^2}{m^2-1}\,\pi^2\,\frac{h^2}{l^2}, \tag{26}$$

eine Gleichung, die uns die Knicklast eines sehr langen Bleches darstellt, wie sie auch von Reißner (Zentralblatt der Bauverwaltung 1909, Nr. 14) gefunden wurde.

Es bleibt jetzt noch zu untersuchen, wann bei einem dünnwandigen Hohlzylinder die Bruchlast durch Zerdrücken kleiner wird, als die kleinste Knicklast. Beachten wir nun, daß $-\frac{T_1}{2h}$ die spezifische Druckbelastung des Materials darstellt, so erkennen wir, daß der Zylinder eher zerdrückt, als zerknickt wird, wenn

$$-\frac{T_1}{2h} > K_d$$

oder

$$-\frac{T_1}{Eh} > \frac{2K_d}{E} \tag{27}$$

wird. Nun liegt aber bei den meisten Materialien $\frac{2K_d}{E}$, unter K_d die spezifische Bruchbelastung für Druck verstanden, zwischen 1 : 200

[1]) Zeitschr. d. Ver. deut. Ing. 1908, S. 1706.

und 1:500, so daß in den meisten Fällen die Gefahr einer Zerdrückung größer ist, als die Gefahr des Zusammenbruches unter der Knicklast. Da jedoch vielfach eine größere Sicherheit gegen Knickung vorgesehen wird, als gegen Zerdrücken, so ist in jedem Falle eine Untersuchung über die Sicherheit angebracht, die ein solcher Hohlzylinder gegen Knickung bietet.

Die Bestimmung der Abmessungen eines Hohlzylinders, der bei einer gegebenen Länge l eine Last P tragen soll, geschieht am besten in folgender Weise. Es sei k_d die zulässige Druckbeanspruchung des Materials, dann folgt aus

$$P = 2\pi r \cdot 2h \cdot k_d$$

das Produkt rh. Wird für den Zylinder ferner eine S-fache Sicherheit gegen Knickung vorgeschrieben, so ist mit

$$-\frac{T_1}{Eh} = \frac{2S \cdot k_d}{E}$$

die Größe $\frac{T_1}{Eh}$ gegeben. Aus der Tabelle I oder bequemer aus der Fig. 9 folgt dann das hierzu gehörige Verhältnis $\frac{r}{h}$, womit dann auch die Einzelwerte r und h zu bestimmen sind. Soweit das nicht schon aus der Fig. 9 hervorgeht, wäre dann noch nach Gl. (25) zu untersuchen, ob etwa für diesen Zylinder die Eulersche Knicklast in Frage kommt, bzw. welche Sicherheit er gegen ein Ausknicken seiner Mittellinie nach dieser Gleichung bietet.

Beispiel I. Als erstes Beispiel wählen wir den untersten Ring eines gußeisernen Turmes, der bei einer Höhe von 700 mm eine Last von 1000 t tragen soll. Bei $S = 12$ facher Sicherheit, einem Elastizitätsmodul $E = 800000$ kg/qcm und einer zulässigen Druckbeanspruchung $k_d = 600$ kg/qcm erhalten wir

$$rh = \frac{P}{4\pi k_d} = \frac{1000000}{4\pi \cdot 600} = 133 \text{ qcm}$$

und weiter

$$-\frac{T_1}{Eh} = \frac{2 \cdot S \cdot k_d}{E} = \frac{2 \cdot 12 \cdot 600}{800000} = 0{,}018$$

Aus Fig. 9 folgt damit

$$\frac{r}{h} = 120$$

und daraus weiter

$r = 126{,}2$ cm ~ 1250 mm $h = 1{,}057 \sim 11$ mm, entsprechend einer Wandstärke $\delta = 22$ mm.

Beispiel II. Wird derselbe Hohlzylinder aus Flußeisen mit $k_d = 1000$ kg/qcm und $E = 2200000$ kg/qcm hergestellt, so ergibt sich

$$-\frac{T_1}{Eh} = \frac{2 \cdot 12 \cdot 1000}{2200000} = 0{,}0109.$$

Damit folgt aus Fig. 9

$$\frac{r}{h} = 210,$$

ferner wird

$$rh = \frac{1000000}{4 \cdot \pi \cdot 1000} = 79{,}6$$

und damit

$r = 130$ cm $= 1300$ mm $h = 0{,}612$ cm $\sim 6{,}5$ mm, entsprechend einer Wandstärke $\delta = 13$ mm.

Beispiel III. Wenn aus konstruktiven Gründen verlangt wird, daß der soeben betrachtete Hohlzylinder einen Durchmesser von 4 m entsprechend einem $r = 200$ cm besitzt, und dabei die gleiche Sicherheit gegen Knickung bietet, wie vorher, so ist damit die Knicklast pro cm gegeben. Es wird nämlich mit $S = 12$

$$-T_1 = \frac{12 \cdot 1000000}{2\pi \cdot 200} = 9560 \text{ kg/cm}.$$

Wählen wir versuchsweise $h = 0{,}6$ cm, so folgt daraus für Flußeisen

$$-\frac{T_1}{Eh} = \frac{9560}{2200000 \cdot 0{,}6} = 0{,}00723$$

und damit aus Fig. 9

$$\frac{r}{h} \sim 330,$$

woraus sich weiter mit $r = 200$ cm ein $h = 0{,}607$ cm entsprechend einer Wandstärke von $\delta \sim 12$ mm ergibt.

Die vorliegenden Entwickelungen gelten unter der Voraussetzung, daß erstens die Verschiebungen u gegenüber v und w vernachlässigt werden können und daß zweitens die erste der Gleichungen (1) nicht berücksichtigt zu werden braucht. Die zuletzt genannte Bedingung ist dabei die Folge der ersten, da für zwei Unkannte auch nur zwei Bedingungsgleichungen vorhanden sein dürfen, andernfalls das Problem überbestimmt wäre. Es handelt sich jetzt noch darum, festzustellen, ob diese Vernachlässigungen nennenswerten Einfluß auf die Resultate haben oder nicht.

Zu diesem Zwecke wollen wir die Voraussetzungen und Beschränkungen gänzlich fallen lassen, wir wollen ferner berücksichtigen, daß bei der Deformation des Zylinders die von uns als selbstverständlich vorausgesetzte gleichmäßige Verteilung der Axialkraft T nicht erhalten bleibt, vielmehr

$$T_1 = T_{10} + \Delta T_1 \qquad (8a)$$

wird, wobei unter T_{10} die konstante Belastung in den Endquerschnitten und unter ΔT_1 die sich darüberlagernde zusätzliche Axialkraft verstanden sei. Wir beachten ferner, daß ΔT_1 und auch T_2 sowohl von Biegungsgrößen als auch von Dehnungsgrößen abhängig sind, von denen wir bisher die ersteren in T_2 vernachlässigt hatten, und setzen daher mit Love

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= D\left[\frac{3}{h^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{m}\cdot\frac{3}{h^2}-\frac{2m+1}{2m(m-1)}\cdot\frac{1}{r^2}\right)\frac{\partial v}{\partial \varphi}+\right.\\ &\qquad\left.+\frac{2m^2-2m-3}{2m(m-1)}\cdot\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{2m+1}{2m(m-1)}\cdot\frac{1}{r^3}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}-\frac{1}{m}\cdot\frac{3}{rh^2}w\right]\\ T_2 &= -D\left[\frac{m+2}{2m(m-1)}\cdot\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{2m+1}{2(m-1)}\cdot\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}+\right.\\ &\qquad\left.+\frac{3}{rh^2}w-\left(\frac{3}{rh^2}-\frac{2m+1}{2(m-1)}\frac{1}{r^2}\right)\frac{\partial v}{\partial \varphi}-\frac{3}{mh^2}\frac{\partial u}{\partial x}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (8b)$$

Da wir ferner u nicht mehr vernachlässigen wollen, erhalten wir auch für S_1 und S_2 geänderte Ausdrücke, nämlich

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= \frac{m-1}{2m}D\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial \varphi}+\left(\frac{3}{h^2}+\frac{1}{r^2}\right)\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{3}{h^2 r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right]\\ S_2 &= \frac{m-1}{2m}D\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial \varphi}-\left(\frac{3}{h^2}-\frac{1}{r^2}\right)\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{3}{rh^2}\frac{\partial u}{\partial x}\right], \end{aligned}\right\} \quad (8c)$$

während sich die Ausdrücke für G_1, G_2, H_1, H_2, N_1, N_2 nicht ändern.

Wir setzen diese Werte für die Spannungsresultanten in die Gl. (1) und (2) ein und erhalten damit an Stelle von Gl. (10)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{3r}{h^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{m-2}{2m}\cdot\frac{3}{rh^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{m+1}{2m}\cdot\frac{3}{h^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial \varphi}+\\ &\quad+\frac{2m^2-2m-3}{2m(m-1)}\cdot\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}-\frac{m^2+2}{2m(m-1)}\cdot\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial \varphi^2}-\frac{1}{m}\cdot\frac{3}{h^2}\frac{\partial w}{\partial x}=0\\ &-\frac{m+1}{2m}\cdot\frac{3}{h^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial \varphi}-\frac{m-1}{2m}\cdot\frac{3r}{h^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{3}{rh^2}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}-\frac{3m^2-5m-1}{2m(m-1)}\cdot\frac{1}{r}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial \varphi}+\\ &\quad+\frac{3}{2(m-1)}\cdot\frac{1}{r^3}\frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3}+\frac{3}{rh^2}\frac{\partial w}{\partial \varphi}=0\\ &-\frac{3}{mrh^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{2m-1}{m}\cdot\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\,\partial \varphi}+\frac{1}{r^4}\frac{\partial^3 v}{\partial \varphi^3}-\frac{3}{r^2h^2}\frac{\partial v}{\partial \varphi}+\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial \varphi^2}+\\ &\quad+\frac{1}{r^4}\frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4}+\frac{m+2}{2m(m-1)}\cdot\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{2m+1}{2(m-1)}\cdot\frac{1}{r^4}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}+\frac{3}{r^2h^2}w-\frac{T_1}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0. \end{aligned}\right\} \quad (10a)$$

In diese Gleichung führen wir nun die Werte

$$u = A\sin\nu\varphi\cos\mu x \qquad v = B\cos\nu\varphi\sin\mu x \qquad w = C\sin\nu\varphi\sin\mu x, \quad (13a)$$

welche den Grenzbedingungen $x=0$ und $x=l$, $u=v=G_1=0$ genügen, ein und erhalten damit, nach Elimination der Konstanten A, B, C für die kritische Belastung, die Knicklast, den folgenden Ausdruck

$$\left.\begin{aligned} -\frac{T_{10}}{D}r^2 &= \mu_1^2+2\nu^2-\frac{3(m+1)}{2m^2}+\frac{1}{\mu_1^2}\left(\nu^4-e\nu^2+\frac{m^2-1}{m^2}\,3\frac{r^2}{h^2}\right)-\\ &\quad-\frac{a'}{m-1}\frac{\nu^4}{N}-\frac{b'}{m-1}\frac{\nu^6}{\mu_1^2 N}-3\frac{r^2}{h^2}\left[\frac{c'}{m-1}\frac{\nu^2}{N}+\frac{d'}{m-1}\cdot\frac{\nu^2}{\mu_1^2 N}\right], \end{aligned}\right\} \quad (16c)$$

wobei unter

$$\frac{a'}{m-1}=\frac{-12m^5+3m^4+14m^3+8m^2-7m-1}{2m^2(m-1)^2(m+1)}=-7{,}60$$

$$\frac{b'}{m-1}=\frac{-10m^4+3m^3+11m^2+3m-2}{2m^2(m-1)(m+1)}=-4{,}42$$

$$\frac{c'}{m-1}=\frac{2m^3+4m^2-2m-1}{m^2(m+1)}=+2{,}31$$

$$\frac{d'}{m-1}=\frac{m^2-1}{m^2}=0{,}91$$

$$e=\frac{12m^4-3m^3-15m^2-3m+2}{2m^2(m^2-1)}=5{,}32$$

$$N=\mu_1^4+\frac{2m-1}{m-1}\mu_1^2\nu^2+\nu^4$$

verstanden ist, während für μ_1 der Ausdruck (17) einzusetzen ist. Der Ausdruck (16c) für T_{10} ist schon etwas vereinfacht, und zwar wurde in ihm h^2 gegen r^2 und l^2 vernachlässigt. Führen wir in (16c) noch (19) ein und schreiben weiter

$$N_2 = \lambda^2 + \frac{2m-1}{m-1}\lambda + 1,$$

so erhalten wir für T_{10} einen Ausdruck analog der Gl. (16a)

$$-\frac{T_{10}}{Eh} = \frac{2}{3}\frac{m^2}{m^2-1}\left[\frac{n^2\pi^2h^2}{l^2} + \frac{h^2}{r^2}\left\{\nu^2\left(2+\frac{1}{\lambda}\right) - \frac{3(m+1)}{2m^2} - \frac{e}{\lambda} - \left(\frac{a'}{m-1} + \frac{b'}{m-1}\cdot\frac{1}{\lambda}\right)\frac{1}{N_2}\right\}\right.$$
$$\left. + \frac{3}{r^2}\left\{\frac{n^2-1}{m^2}\cdot\frac{1}{\lambda} - \left(\frac{c'}{m-1} + \frac{d'}{m-1}\frac{1}{\lambda}\right)\frac{1}{N_2}\right\}\right]. \qquad (16d)$$

Gl. (16c) und (16d) stellen die vollständigeren und genaueren Ausdrücke für die Knicklast dar, die dafür natürlich auch erheblich komplizierter gebaut sind als die Gl. (16) und (16a). Damit wird aber auch ihre Behandlung viel umständlicher, und wir wollen uns aus diesem Grunde darauf beschränken, aus den beiden Ausdrücken für die Knicklast nur einige wenige Schlüsse zu ziehen.

Zunächst folgt aus (16d) für sehr kurze Zylinder, d. h. für sehr großes r und sehr kleines l mit $n = 1$

$$-\frac{T_{10}}{Eh} = \frac{2}{3}\frac{m^2}{m^2-1}\cdot\frac{\pi^2h^2}{l^2}$$

wieder der Ausdruck (26).

Wir differentiieren weiter T_{10} in (16c) nach μ_1^2 bei konstant gehaltenem ν und erhalten damit eine Beziehung zwischen μ_1 und $\frac{h}{r}$ bei einem bestimmten Werte von ν und diese Beziehung gibt an, für welchen Wert von μ_1 bei gegebenen Werten von $\frac{r}{h}$ und ν der kleinste Wert von T_{10} auftritt. Setzen wir diese zusammengehörigen Werte von μ_1, $\frac{r}{h}$ und ν in (32) ein, so erhalten wir den zugehörigen Wert von T_{10}. Die Werte von T können nun in Fig. 9 eingetragen werden, sie liegen sämtlich in der direkten Nachbarschaft der Kurve $T_{1\,\min}$, deren Werte sonach hinreichend genau sind.

2. Fall. Eingespannte Endflächen.

Bei eingespannten Endflächen verschwinden an diesen Stellen sowohl die Deformationen, als auch der Differentialquotient $\frac{\partial w}{\partial x}$ und die Grenzbedingungen lauten demnach

für $x = 0$ und $x = 1$

muß $v = 0$, $w = 0$ und $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$

sein.

Diese Grenzbedingungen lassen sich durch das folgende Integral der Gleichung (12) erfüllen

$$\left.\begin{aligned} v &= Be^{\mu x} \\ w &= Ae^{\mu x} \end{aligned}\right\}. \qquad (13a)$$

Zwischen den Konstanten A und B besteht hierbei die Beziehung

$$B = -\frac{\nu}{r^2}\cdot\frac{\frac{\nu^2}{r^2} + \frac{3}{h^2} - \frac{3m-1}{m}\mu^2}{\left(-2\frac{m-1}{2m}\mu^2 + \frac{\nu^2}{r^2}\right)\frac{3}{h^2}}A = -\nu f(\mu)A \qquad (14a)$$

und nach Einsetzung dieses Wertes von B in die zweite Gleichung (12) erhalten wir bei entsprechender Umformung

$$\left.\begin{aligned} &\frac{m-1}{2m}\mu^6 - \left(\frac{2m-1}{m}\frac{\nu^2}{r^2} + \frac{m-1}{2m}\frac{T_1}{D}\right)\mu^4 + \left\{\frac{5m-1}{2m}\frac{\nu^4}{r^2} - \frac{7m-3}{2m}\frac{\nu^2}{r^2} + \frac{m-1}{2m}\frac{3}{h^2} + \frac{T_1}{D}\nu^2\right\}\mu^2 \\ &- \frac{\nu^4}{r^6}(r^2-2) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (15a)$$

Lösen wir nun diese Gleichung nach μ auf, so erhalten wir 6 Wurzeln μ, von denen je zwei derart zueinander gehören, daß ihr Quadrat gleich ist. Danach lauten also die Ausdrücke für die Verschiebungen

$$\left.\begin{aligned} v &= -\sum_1^3 (A_n e^{\mu_n x} + A_n' e^{-\mu_n x})\,\nu f(\mu_n), \\ w &= \sum_1^3 (A_n e^{\mu_n x} + A_n' e^{-\mu_n x}) \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

und die darin enthaltenen 6 Konstanten bestimmen sich aus den Grenzbedingungen, welche nach Einführung von (28) in folgender Form erscheinen:

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma(A_n + A_n') = 0 \\ &\Sigma f(\mu_n)(A_n + A_n') = 0 \\ &\Sigma \mu_n (A_n - A_n') = 0 \\ &\Sigma (A_n e^{\mu_n l} + A_n' e^{-\mu_n l}) = 0 \\ &\Sigma f(\mu_n)(A_n e^{\mu_n l} + A_n' e^{-\mu_n l}) = 0 \\ &\Sigma \mu_n (A_n e^{\mu_n l} - A_n' e^{-\mu_n l}) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Da nun diese Gleichungen in den Konstanten A_1 bis A_3' homogen sind, muß die Determinante der Koeffizienten der A verschwinden, also

$$\Sigma(+1\cdot f_1\cdot\mu_2\cdot e^{-\mu_2 l}\cdot f_3 e^{\mu_3 l}\cdot -\mu_3 e^{-\mu_3 l})=0 \quad (30)$$

und diese Gleichung stellt uns die Bedingung dar, welcher die drei Werte T_1, μ bzw. n und ν genügen müssen. Leider ist diese Gleichung transzendent und von so komplizierter Bauart, daß auf ihre numerische Auswertung verzichtet werden muß.

B. Knickung durch äußeren Druck.

Wir gehen bei der Betrachtung des vorliegenden Falles von den nämlichen Entwickelungen aus, die uns zu den Gleichungen für die Knickung unter axialem Druck geführt haben. Wir betrachten jedoch, wie dies schon bei der Einführung des Kontingenzwinkels $d\tau$ geschah, das Element von vornherein im deformierten Zustande und haben infolgedessen in den Gleichungen (1) für r den Krümmungsradius ϱ_l einzuführen. Zu den in der Richtung des Radius wirkenden Kräften tritt dann noch die von dem äußeren Druck p herrührende Kraft $p\,\varrho_l d\varphi\,dx$ hinzu, so daß nunmehr die Gleichgewichtsbedingung für diese Richtung lautet:

$$\varrho_l\frac{\partial N_1}{\partial x}+\frac{\partial N_2}{\partial\varphi}+T_2+\varrho_l T_1\cdot\frac{\partial\tau}{\partial x}+p\,\varrho_l=0. \quad (1a)$$

Setzen wir nun mit Bryan, der einen speziellen Fall des vorliegenden Problems zuerst behandelte[1]),

$$\varrho_l=r-\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial v}{\partial\varphi} \quad (31)$$

in (1a) ein, so erhalten wir, unter Vernachlässigung aller von der zweiten Ordnung kleinen Größen

$$\left.\begin{aligned} r\frac{\partial N_1}{\partial x}+\frac{\partial N_2}{\partial\varphi}+T_2+rT_1\frac{\partial\tau}{\partial x}\\ +p\left(r-\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right)=0,\end{aligned}\right\} \quad (1b)$$

während sich die Gleichungen (2) bis (9) und die beiden ersten Gleichungen (1) nicht ändern. Mit $T_1=0$, wie wir es hier annehmen wollen, lautet nunmehr die erste Gl. (10)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial\varphi^2}+\frac{1}{r^4}\frac{\partial^4 w}{\partial\varphi^4}+\frac{3}{h^2r^2}w-\frac{p}{rD}\left(r-\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right)+\frac{2m-1}{m}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial\varphi}+\\ +\frac{1}{r^4}\frac{\partial^3 v}{\partial\varphi^3}-\frac{3}{h^2r^2}\frac{\partial v}{\partial\varphi}=0\end{aligned}\right\} \quad (10b)$$

und weiter mit (11) die erste Gl. (12)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4}-\frac{2\nu^2}{r^2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\nu^4}{r^4}W+\frac{3}{h^2r^2}W-\frac{p}{rD}(r+\nu^2W+\nu V)-\frac{2m-1}{m}\cdot\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\\ +\frac{\nu}{r^2}\left(\frac{\nu^2}{r^2}+\frac{3}{h^2}\right)V=0\end{aligned}\right\} \quad (12a)$$

und die zweiten Gleichungen (10) und (12) bleiben ungeändert.

Diese Gleichung hat zunächst ein partikuläres Integral, das sich aus

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^4W}{dx^4}+\frac{3}{h^2r^2}W-\frac{p}{D}=0\\ V=0\end{aligned}\right\} \quad (32)$$

ergibt und beliebigen Grenzbedingungen anpassen läßt. Es stellt die unter dem Einfluß des Druckes p eintretende achsensymmetrische Verzerrung dar und soll nicht weiter verfolgt werden, da es für die Beurteilung der Knickerscheinungen ohne Belang ist[2]).

Wir wollen in der Folge nur den zuerst betrachteten Fall der freien Enden weiter verfolgen und führen zu diesem Zwecke für V und W die Ausdrücke (13) ein. Damit bleibt aber auch der Ausdruck (14) für die Integrationskonstante B unverändert und aus der Einführung von (13) und (14) in (12a) folgt nach Elimination von A und B unter Streichung des Gliedes $\frac{p}{D}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{3}{h^2}\frac{m-1}{2m}\mu^6+\frac{2m-1}{m}\frac{3}{h^2}\frac{\mu^4\nu^2}{r^2}+\mu^2\left\{\frac{5m-1}{2m}\frac{\nu^4}{r^2}-\frac{7m-3}{2m}\cdot\frac{\nu^2}{r^2}+\frac{m-1}{2m}\frac{3}{h^2}\right\}\frac{3}{h^2r^2}+\\ +\frac{3}{h^2}\frac{\nu^4}{r^6}(\nu^2-2)-\frac{p}{D}\frac{\nu^2}{r}\left\{\mu^2\left(\frac{m-1}{2m}\cdot\frac{3}{h^2}-\frac{3m-1}{2m}\cdot\frac{1}{r^2}\right)+\frac{\nu^2}{r^2}\left(\frac{3}{h^2}-\frac{1}{r^2}\right)-\frac{3}{h^2r^2}\right\}=0.\end{aligned}\right\} \quad (15a)$$

Lösen wir diese Gleichung nach p auf, so erhalten wir für den „kritischen", d. h. den für die Beurteilung der Knicksicherheit maßgebenden Druck p_K unter Vernachlässigung von $\frac{1}{r^2}$ gegen $\frac{1}{h^2}$

1) Siehe Love, S. 636.
2) Vgl. R. Lorenz, Z. d. V. d. I., 1908, S. 1706 ff., wo dieses Integral ausführlich behandelt wurde.

$$\frac{p_K}{D\,r}=\left\{\mu^4\left(\frac{m-1}{2m}\mu^2+\frac{2m-1}{m}\frac{\nu^2}{r^2}\right)+\frac{\mu^2}{r^2}\left(\frac{5m-1}{2m}\frac{\nu^4}{r^4}-\frac{7m-3}{2m}\frac{\nu^2}{r^2}+\frac{m-1}{2m}\cdot\frac{3}{h^2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\nu^4}{r^4}(\nu^2-2)\right\}\frac{1}{\left(\frac{m-1}{2m}\mu^2+\frac{\nu^2-1}{r^2}\right)\nu^2}\cdot \qquad (33)$$

Die weitere Behandlung dieser Gleichung wird nun dadurch außerordentlich erleichtert, daß bei einer Knickung durch äußeren Druck in der Längsrichtung des Hohlzylinders stets nur eine Welle auftreten kann, d. h. daß in (33) immer $n=1$, also

$$\mu=\frac{\pi}{l}$$

einzusetzen ist. Setzen wir nun weiter

$$\mu_1=\pi\frac{r}{l},$$

so folgt aus (33) mit (6)

$$\frac{p_K}{E}=\frac{2}{3}\frac{m^2}{m^2-1}\frac{h^3}{r^3}\left\{\mu^4\cdot\left(\frac{m-1}{2m}\mu_1^2+\frac{2m-1}{m}\nu^2\right)+\mu_1^2\left(\frac{5m-1}{2m}\nu^4-\frac{7m-3}{2m}\nu^2+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{m-1}{2m}\cdot 3\frac{r^2}{h^2}\right)+\nu^4(\nu^2-2)\right\}\frac{1}{\left(\frac{m-1}{2m}\mu_1^2+\nu^2-1\right)\nu^2}, \qquad (34)$$

oder, wenn wir $m=\frac{10}{3}$ einführen,

$$\frac{p_K}{E}=0{,}732\,\frac{h^3}{r^2}\left\{\mu_1^4(0{,}35\mu_1^2+1{,}7\nu^2)+\mu_1^2\left(2{,}35\nu^4-3{,}05\nu^2+1{,}05\frac{r^2}{h^2}\right)+\right.$$
$$\left.+\nu^4(\nu^2-2)\right\}\frac{1}{(0{,}35\mu_1^2+\nu^2-1)\nu^2}. \qquad (34a)$$

Setzen wir hierin abkürzungsweise

$$0{,}732\,\{\mu_1^4(0{,}35\mu_1^2+1{,}7\nu^2)+\mu_1^2(2{,}35\nu^4-3{,}05\nu^2)+\nu^4(\nu^2-2)\}\frac{1}{(0{,}35\mu_1^2+\nu^2-1)\nu^2}=Y_\nu$$
$$0{,}732\,\frac{1{,}05\mu_1^2}{(0{,}35\mu_1^2+\nu^2-1)\nu^2}=Z_\nu \qquad (35)$$

so gelangen wir zu folgendem sehr einfachen Ausdruck für den kritischen Druck

$$\frac{p_K}{E}=Y_\nu\frac{h^3}{r^3}+Z_\nu\frac{h}{r}. \qquad (36)$$

In die Gl. (35) und (36) kann jeder Wert von ν eingehen, solange nur

$$\nu\geq 2$$

ist. Daraus folgt, daß ein bestimmter Hohlzylinder einfach unendlich viele kritische Drücke besitzt, und es handelt sich für uns jetzt darum, die kleinsten davon zu bestimmen.

Zu diesem Zwecke berechnen wir uns für $\nu=2$, 3, 4 usw. und für verschiedene Werte von μ_1 die zugehörigen Y_ν und Z_ν, die in Fig. 11 graphisch zusammengestellt sind. Wir bilden weiter für zwei Werte ν und $\nu+1$ die Gleichung (36), und subtrahieren diese beiden Gleichungen voneinander. Dann erhalten wir

$$\frac{1}{E}(p_{K(\nu+1)}-p_{K\nu})=$$
$$=\frac{h^3}{r^3}\left\{(Y_{\nu+1}-Y_\nu)-(Z_\nu-Z_{\nu+1})\frac{r^2}{h^2}\right\}$$

und daraus ist zu schließen, daß $p_{K(\nu+1)}<p_{K\nu}$ wird, falls

$$\frac{r^2}{h^2}>\frac{Y_{\nu+1}-Y_\nu}{Z_\nu-Z_{\nu+1}}$$

ist. Die Beziehung

$$\frac{r^2}{h^2}=\frac{Y_{\nu+1}-Y_\nu}{Z_\nu-Z_{\nu+1}} \qquad (37)$$

stellt aber $\frac{r}{h}$ in Abhängigkeit von μ_1 dar, solange $\nu=$ const festgehalten wird, und hieraus sind für verschiedene Werte von ν und μ_1 die entsprechenden Werte von $\frac{r}{h}$ berechnet und in Fig. 12 die Abhängigkeit des Verhältnisses $\frac{r}{h}$ von μ_1 und ν graphisch wiedergegeben. Die Kurven in Fig. 12 trennen die $\frac{r}{h}$ μ_1-Ebene in eine Reihe von Flächenstreifen, von denen jeder das Gebiet darstellt, innerhalb dessen der kritische Druck p_k für einen bestimmten, das Gebiet kennzeichnenden Wert von ν ein Minimum wird. Fällt also für einen gegebenen Hohlzylinder, d. h. bei bekanntem μ_1 und $\frac{r}{h}$ der Punkt $\mu_1, \frac{r}{h}$

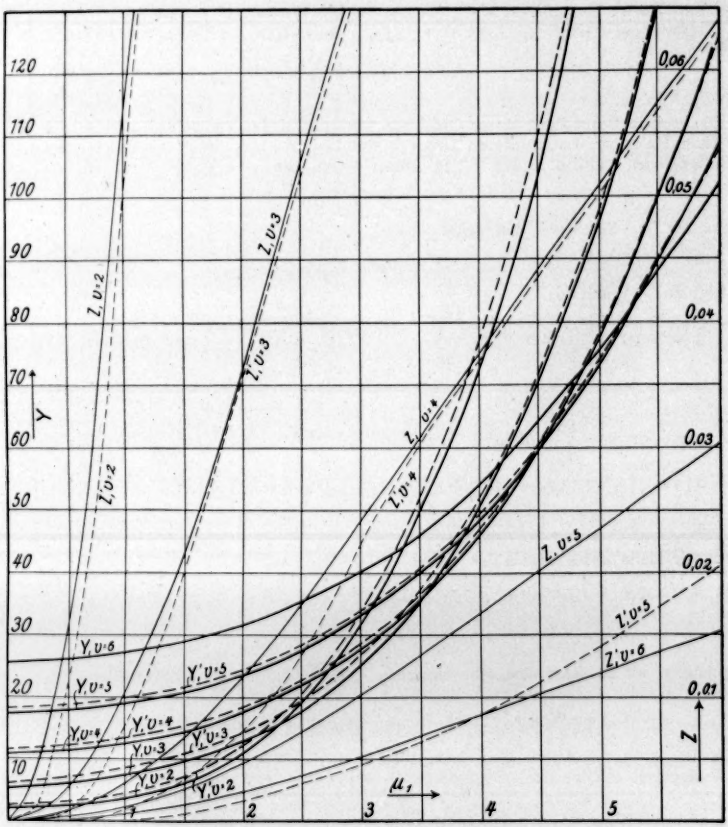


Fig. 11.

z. B. in das Gebiet $\nu = 4$, so ermittelt sich nach Festlegung der Größen Y_4 und Z_4 aus Fig. 11 mit $\nu = 4$ der kritische Druck aus (36).

Damit ist aber auch gleichzeitig der Weg gegeben, auf welchem man zur Ermittelung des kritischen Druckes eines Hohlzylinders mit bekannten Abmessungen gelangt. Aus dem Radius r, der Länge l und der halben Wandstärke h bestimmt man sich $\mu_1 = \pi \frac{r}{l}$ und $\frac{r}{h}$, und sucht nun den Punkt $\mu_1 \frac{r}{h}$ in Fig. 12 auf. Fällt dieser Punkt in das Gebiet $\nu = a$, so findet man weiter aus Fig. 11 die zu $\nu = a$ und μ_1 gehörigen Werte von Y und Z und erhält mit diesen aus (36) den gesuchten kritischen Druck.

Aus der Fig. 12 folgt weiter, daß mit abnehmendem μ_1, d. h. mit wachsender Länge des Zylinders im Verhältnis zum Radius auch die Zahl der auf dem Umfang beim Knicken auftretenden Wellen abnimmt, bis sie schließlich für sehr lange Zylinder gleich 2 wird. Für diesen Fall können wir aber auch den kritischen Druck genau angeben. Dann ist nämlich $\mu_1 = 0$ und damit wird

$$\frac{p_{k0}}{E} = \frac{2}{3} \frac{m^2}{m^2 - 1} \cdot \frac{\nu^2(\nu^2 - 2)}{\nu^2 - 1} \cdot \frac{h^3}{r^3} \qquad (38)$$

oder da hierbei stets $\nu = 2$ zu setzen ist,

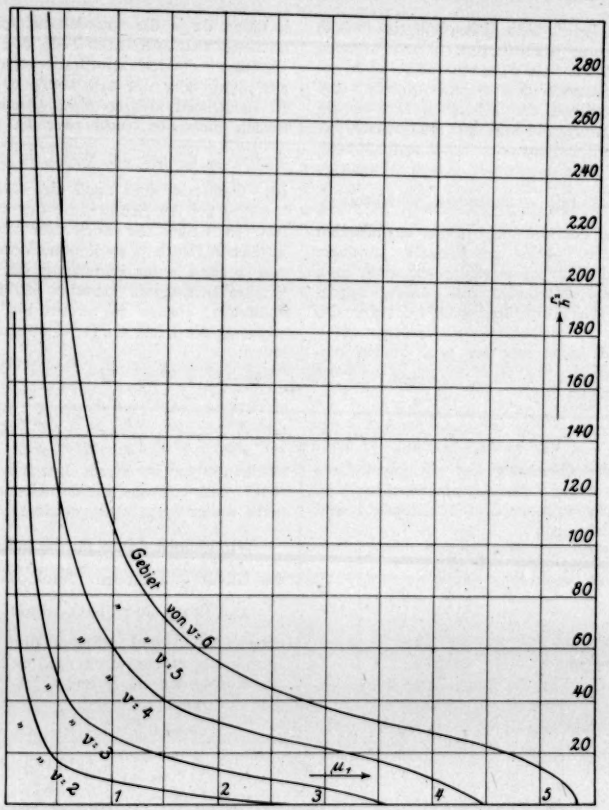


Fig. 12.

$$\frac{p_{k0}}{E} = \frac{16}{9}\,\frac{m^2}{m^2-1}\,\frac{h^3}{r^3}. \qquad (38a)$$

Der Fall eines sehr langen Hohlzylinders ist nun schon von Bryan[1]) behandelt worden, während Forchheimer den kritischen Druck eines Ringes bestimmt hat. Bryan ging bei seinen Untersuchungen davon aus, daß die Deformationen eines sehr langen Hohlzylinders als dehnungslos, d. h. als reine Biegungsdeformationen anzusehen sind und fand hierbei

$$\frac{p_{k0}}{E} = 2\,\frac{m^2}{m^2-1}\,\frac{h^3}{r^3}. \qquad (39)$$

Die gleiche Voraussetzung liegt auch den Untersuchungen von Föppl zugrunde, der aber, da er nur einen Ring von geringer Länge betrachtete, die Querkontraktion vernachlässigen durfte. Er fand hierbei den kritischen Druck

$$\frac{p_k}{E} = \frac{8}{3}\,\frac{h^3}{r^3}. \qquad (40)$$

Der Bryansche Wert des kritischen Druckes unterscheidet sich nun von dem unseren um $\frac{2}{9}\,\frac{m^2}{m^2-1}\,\frac{h^3}{r^3}$ und dieser Unterschied erklärt sich dadurch, daß wir in unserer Rechnung an verschiedenen Stellen h^2 gegen r^2 vernachlässigen mußten, weil sich sonst die Ausdrücke zu umfangreich gestaltet hätten. Der viel einfachere Bryansche Fall dagegen, der hier nur als

1) Love, S. 637.

Grenzfall erscheint, läßt sich ohne eine solche Vernachlässigung durchführen. Der Vergleich der beiden Werte von p_k nach (38a) und (39) läßt übrigens noch den Schluß ziehen, daß unsere Rechnungen die kritischen Drücke ein wenig zu klein ergeben und daß man sonach mit unseren Ausdrücken etwas zu sicher rechnen wird.

Aus Fig. 12 folgt ferner das merkwürdige Ergebnis, daß mit wachsendem Verhältnis $\frac{r}{h}$ auch die Zahl der auf den Umfang entfallenden Wellen wächst. Dies anscheinend paradoxe Resultat wird aber sofort erklärlich, wenn man einmal einen Hohlzylinder von großem Durchmesser und verhältnismäßig kleiner Länge, also von großem μ, betrachtet. Ein solcher Hohlzylinder wird nicht nur an zwei Stellen einknicken, da ja die von den beiden Stellen hinreichend weit entfernten Teile des bedeutenden Umfanges von den Deformationen an zwei Stellen gar nicht, oder nur sehr wenig berührt werden. Er kann sich also an einer ganzen Reihe von Stellen einbeulen, und zwar an um so mehr Stellen, je dünner die Wand, je größer also $\frac{r}{h}$ ist. Damit ist aber auch dies Resultat erklärt.

Wie bei der Ermittelung der axialen Knicklast, so wollen wir auch hier versuchen, den kritischen Druck p auch ohne Vernachlässigung von u und unter Benutzung der Gl. (8a) bis (8c) zu bestimmen. Hierbei bleibt Gl. (1b) unverändert, ebenso die ersten beiden Gl. (10a), während die letzte Gl. (10a) entsprechend (10b) lautet:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial\varphi^2}+\frac{1}{r^4}\frac{\partial^4 w}{\partial\varphi^4}+\frac{m+2}{2m(m-1)}\cdot\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{2m+1}{2(m-1)}\frac{1}{r^4}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}+\frac{3}{r^2h^2}w-\\&-\frac{p}{rD}\left(r-\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right)+\frac{2m-1}{m}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial\varphi}+\frac{1}{r^4}\frac{\partial^3 v}{\partial\varphi^3}-\frac{3}{r^2h^2}\frac{\partial v}{\partial\varphi}-\frac{3}{mrh^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=0.\end{aligned}\right\}\quad(10c)$$

Auch diese Gleichung hat ein partikuläres Integral, das der achsensymmetrischen Verzerrung durch äußeren Druck entspricht und das den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{m+2}{2m(m-1)}\cdot\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{3}{r^2h^2}w-\\&-\frac{p}{D}-\frac{3}{mrh^2}\frac{\partial u}{\partial x}=0\\&\frac{3r^2}{h^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^3}+\frac{2m^2-2m-3}{2m(m-1)}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}-\frac{1}{m}\cdot\frac{3}{h^2}\frac{\partial w}{\partial x}=0\end{aligned}\right\}\quad(32a)$$

genügen muß. Für die Beurteilung der Knickerscheinungen ist dieses Integral ohne Bedeutung, und soll aus diesem Grunde hier auch nicht weiter besprochen werden.

Wir können daher für die Folge in Gl. (10c) das Glied $\frac{p}{D}$ auslassen [durch Elimination von $\frac{\partial u}{\partial x}$ aus (10a) und (10c) würde es von selbst verschwinden] und erhalten nun weiter durch Einführung des Ansatzes (13a) unter Entfernung der Konstanten A, B und C

$$\left.\begin{aligned}\frac{p_K'}{E}=&\frac{2}{3}\frac{m^2}{m^2-1}\left[\frac{h^3}{r^3}\left[\frac{2m-1}{m}\mu_1^2+\nu^2+\left(\frac{\mu_1^4}{\nu^2}+\frac{\mu_1^2}{m}\right)\cdot\frac{\mu_1^4+\frac{2m-1}{m-1}\mu_1^2\nu^2+\nu^4}{\mu_1^4-\frac{2m+1}{m}\mu_1^2+\frac{2m-1}{m-1}\mu_1^2\nu^2-\nu^2+\nu^4}\right]+\right.\\&\left.+3\frac{m-1}{m+1}\cdot\frac{h}{r}\left[\nu^2-\frac{\mu_1^2}{m}+\left(\frac{\mu_1^2}{m}-\nu^2+1\right)\frac{\mu_1^4+\frac{2m-1}{m-1}\mu_1^2\nu^2+\nu^4}{\mu_1^4-\frac{2m+1}{m}\mu_1^2+\frac{2m-1}{m-1}\mu_1^2\nu^2-\nu^2+\nu^4}\right]\right]\end{aligned}\right\}\quad(34b)$$

oder

$$\frac{p'}{E}=Y_\nu'\frac{h^3}{r^3}+Z_\nu'\frac{h}{r},\quad(36a)$$

worin abkürzungsweise wie früher mit $\mu_1=\frac{\pi r}{e}$

$$\left.\begin{aligned}Y_\nu'=&\frac{2}{3}\frac{m^2}{m^2-1}\left[\frac{2m-1}{m}\mu_1^2+\nu^2+\left(\frac{\mu_1^4}{\nu^2}+\frac{\mu_1^2}{m}\right)\cdot\frac{\mu_1^4+\frac{2m-1}{m-1}\mu_1^2\nu^2+\nu^4}{\mu_1^4-\frac{2m+1}{m}\mu_1^2+\frac{2m-1}{m-1}\mu_1^2\nu^2-\nu^2+\nu^4}\right]\\Z_\nu'=&2\cdot\frac{m^2}{(m+1)^2}\left[\nu^2-\frac{\mu_1^2}{m}+\left(\frac{\mu_1^2}{m}-\nu^2+1\right)\cdot\frac{\mu_1^4+\frac{2m-1}{m-1}\mu_1^2\nu^2+\nu^4}{\mu_1^4-\frac{2m+1}{m}\mu_1^2+\frac{2m-1}{m-1}\mu_1^2\nu^2-\nu^2+\nu^4}\right]\end{aligned}\right\}\quad(35a)$$

gesetzt wurde. Für verschiedene Werte von μ_1 und ν sind nun die Werte von Y_ν' und Z_ν' berechnet und in Fig. 11 gestrichelt eingetragen worden. Man erkennt, daß Y_ν' immer etwas größer ist als Y_ν, während umgekehrt Z_ν' im Anfang viel kleiner ist als Z_ν, sich diesem aber mit wachsendem μ_1 asymptotisch annähert. Demnach sind die nach der genaueren Methode ermittelten Werte des kritischen Druckes p_K' kleiner als die unter Vernachlässigung von u gefundenen Werte und diesen bei Berechnungen von Hohlzylindern, die unter äußerem Druck stehen, stets vorzuziehen.

Für unendlich lange Hohlzylinder, d. h. für $\mu_1 = 0$ geht Gl. (34b) über in

$$\frac{p_K}{E} = \frac{8}{3}\frac{h^3}{r^3}\cdot\frac{m^2}{m^2-1}, \qquad (41)$$

also eine der Gl. (40) ganz entprechende Form.

Eine Prüfung der Ergebnisse unserer Theorie an Hand des vorliegenden Versuchsmaterials ist kaum mit einiger Sicherheit durchzuführen. Dies liegt in erster Linie daran, daß alle Versuche an genieteten oder geschweißten Rohren vorgenommen wurden, und diese Rohre hatten infolge der Verbindungen wahrscheinlich erheblichere Unsymmetrie, als es den Grundlagen unserer Berechnung entspricht. Es ist daher nicht anders zu erwarten, daß die Versuche an genieteten Rohren zum Teil wesentlich geringere kritische Drücke ergeben, als die Rechnung sie erwarten läßt. Hierbei ist auch noch zu beachten, daß wir in unserer Rechnung von vornherein h^2 gegen r^2 vernachlässigt haben, weil sonst die Rechnung außerordentlich viel komplizierter geworden wäre, und diese Vernachlässigung führt, wie sich überschläglich erkennen läßt, auf zu große Werte von Y_ν' und wahrscheinlich auch von Z_ν'. Endlich sind die Werte von Y_ν' und Z_ν', nach denen die Fig. 11 gezeichnet wurde, nur mit dem Rechenschieber ermittelt, und auch diese Berechnung ergibt namentlich für Z_ν', das als kleine Differenz zweier beträchtlicher Werte erscheint, leicht zu große Zahlen.

Um wenigstens ein Bild über das Verhältnis der Rechnungswerte zu den Beobachtungswerten von p_K zu ermitteln, wählen wir aus den Versuchen auf der Kaiserlichen Werft in Danzig[1]) drei aus und vergleichen hiermit noch den bei Bach[2]) mit E bezeichneten Versuch. Wir finden

Versuch Nummer		1	5	6	E
Durchmesser $2r$	mm	1000	1000	1000	1371
Wandstärke $2h$	mm	8,1	11,3	11,0	6,35
Länge l	mm	1062	1980	1065	914
$100\,\frac{h}{r}$		0,81	1,13	1,10	0,463
μ_1		1,46	0,789	1,47	2,34
ν		5	4	5	6
Y_ν'		21,3	13,0	21,3	35,2
Z_ν'		0,0005	0,0003	0,0005	0
$\frac{p_K}{E}\cdot 10^6$		15,35	22,1	32,0	3,52
p_K mit $E = 2\cdot 10^6$	kg/qcm	30,7	44,2	64	7,04
$p_{K\,\mathrm{eff}}$ beobachtet	kg/qcm	24	32	45	9
$\frac{p_K}{p_{K\,\mathrm{eff}}}$		1,28	1,37	1,42	0,783

Mit Ausnahme des Versuchs E ergaben sich also alle Beobachtungswerte von p_K erheblich kleiner als die Rechnungswerte, doch ist es bemerkenswert, daß die Rechnungsergebnisse um so besser mit den Beobachtungswerten übereinstimmen, je kleiner das Verhältnis $h:r$ ist. Es wäre sehr interessant, das Verhältnis der berechneten zu den beobachteten Werten festzustellen, für den Fall, daß die Rechnung ohne Vernachlässigung durchgeführt wird. Leider scheinen sich dem aber Schwierigkeiten entgegenzustellen, deren Überwindung kaum möglich erscheint.

Solange diese Rechnung nicht durchgeführt ist, empfiehlt es sich, zur Berechnung von Rohren, die unter äußerem Druck stehen, die Gl. (36a) zu verwenden und dabei die Wandstärke so zu bemessen, daß der äußere Druck ein Bruchteil des kritischen Druckes p_K wird, also

$$p = 0{,}1\,p_K \text{ bis höchstens } 0{,}25\,p_K$$

zu setzen, was einer zehn- bis vierfachen Sicherheit gegen Knickung entspricht.

Zusammenfassung.

Im Anschluß an die Lovesche Theorie dünner Platten und Schalen wurde die nicht

1) Vgl. Bach, Z. d. Ver. d. Ing. 1894, S. 689 u. f.
2) Bach, Die Maschinenelemente, 7. Aufl., S. 191.

achsensymmetrische Knickung dünner Hohlzylinder unter axialem und radialem äußerem Drucke untersucht. Hierbei wurde zunächst von der ersten Näherung der Loveschen Theorie ausgegangen, und im Anschluß daran beide Probleme auch in der zweiten Annäherung untersucht. In beiden Fällen ist hierbei die Annahme gemacht worden, daß das Quadrat der Wandstärke als klein gegenüber dem Quadrate des Radius vernachlässigt werden kann. Die Rechnungsergebnisse sind graphisch aufgetragen und im Falle der Rohre unter äußerem Druck mit den bisher vorliegenden Beobachtungswerten verglichen worden.

(Eingegangen 22. Januar 1911.)

Über Ladungsbestimmungen an Nebelteilchen.

Von Karl Przibram.

In einer früheren Notiz[1]) habe ich gezeigt, daß bei Anbringung der Cunningham-Millikanschen Korrektur die Maxima der Verteilungskurve der 1200 an Tropfen des Phosphornebels gemessenen Ladungswerte sich dem Elementarquantum und seinen Vielfachen nähern. Auffallend blieb aber die große Streuung der Werte und die starken Unterschreitungen des Elementarquantums. Vor kurzem hat nun Herr E. Regener[2]) ähnliche Messungen ausgeführt, und gelangt zu Resultaten, die denen R. A. Millikans sehr nahe kommen. Die starke Streuung und insbesondere die Unterschreitungen bei meinen Versuchen führt Herr Regener darauf zurück, daß bei meinem Kondensator mit nahezu kubischem Luftraum Störungen durch Wandladungen auftreten, die bei seiner Anordnung (Verhältnis der Tiefe zur Höhe des Kondensators = 6 : 1) wegfallen.

Ich bin um so eher geneigt, einer derartigen Deutung meiner Ergebnisse beizutreten, als ich schon früher[3]) bei Beobachtung in unmittelbarer Nähe der Wand auf starke Störungen gestoßen war und ferner zeigen konnte, daß die Ladungswerte nach dem Fehlergesetz um die Stellen größter Häufigkeit verteilt sind[4]).

Nach dem Erscheinen der Arbeit des Herrn Regener habe ich meine Messungen mit einem verbesserten Kondensator (Platten 10×10 mm im Abstand 1 mm) wieder aufgenommen. Im folgenden gebe ich vorläufig die bisher gewonnenen Resultate, denen ich bald genauere folgen lassen zu können hoffe. Tabelle I gibt als Beispiel die erste mit dem neuen Kondensator an einem Tröpfchen des Phosphornebels erhaltene Beobachtungsreihe. Die Tabellen II bis IV geben die aus derartigen Serien gebildeten mittleren Zeiten und die daraus berechneten Radien a, nach Cunningham, die Ladungen ε' nach Stokes und ε nach Cunningham. Die Ladungen sind negativ.

Die dauernde Beobachtung ein und desselben Teilchens hat keine Schwierigkeit; die Streuung ist unvergleichlich geringer als früher, und durch Mittelbildung aller Ladungen gelange ich für Kalilaugetröpfchen (elektrolytischer Sauerstoff) zum Werte $5{,}13 \cdot 10^{-10}$ e. s. E. Der Abweichung um 4,7 Proz. vom Werte $4{,}9 \cdot 10^{-10}$ kann ich im gegenwärtigen Stadium meiner Versuche kein besonderes Gewicht beilegen.

Der Phosphornebel gibt im Mittel, die Dichte der Tröpfchen provisorisch gleich 1 gesetzt,

Tabelle I.

Phosphor.
Spannung 85 Volt.
Fallstrecke 0,0660 cm.

Fallzeit in sec	Hebezeit in sec
17,3	9,6
17,7	9,2
20,3	9,0
17,0	10,1
15,1	9,4
18,1	10,2
Mittel	
17,58	9,58

$a = 5{,}1 \cdot 10^{-5}$
$\varepsilon = 5{,}7 \cdot 10^{-10}$
$\varepsilon' = 7{,}0 \cdot 10^{-10}$

Tabelle II.

Kalilauge ($s = 1{,}10$) in Sauerstoff ($\mu = 1{,}98 \cdot 10^{-4}$).
Fallstrecke 0,0660 cm. Feld 2,73 e. s. E.

Fallzeit in sec	Hebezeit in sec	$a \cdot 10^5$	$\varepsilon' \cdot 10^{10}$	$\varepsilon \cdot 10^{10}$	
40,9	5,0	3,5	7,30	5,17	
35,5	5,15	3,5	7,85	5,83	
30,4	7,9	3,8	5,98	4,51	
27,6	6,8	4,0	7,30	5,50	
24,3	8,6	4,3	6,93	5,28	
22,9	8,75	4,4	6,83	5,28	
22,5	9,8	4,5	6,45	5,06	
21,9	10,1	4,6	6,50	5,06	
21,9	8,7	4,6	7,15	5,61	
20,4	10,6	4,8	6,60	5,17	
18,5	16,0	5,0	5,66	4,51	
15,2	22,9	5,6	5,84	4,73	
25,62	1,4	4,1	32,6	24,97 = 4,99×5	
				Mittel 5,13	

1) Diese Zeitschr. **12**, 62, 1911; Wiener Bericht **119**, 1719, 1910.
2) Diese Zeitschr. **12**, 135, 1911.
3) Wiener Ber. **119**, 1723, 1910.
4) Wiener Ber. **119**, 1724 und 19. Januar 1911.

Tabelle III.

Phosphor ($s = 1{,}0$) in Luft ($\mu = 1{,}80 \cdot 10^{-4}$).

Fallstrecke 0,0660 cm.

Feld in e. s. E.	Fallzeit in sec	Hebezeit in sec	$a \cdot 10^5$	$\varepsilon' \cdot 10^{10}$	$\varepsilon \cdot 10^{10}$	
2,83	28,6	5,05	3,9	7,98	6,0	
2,60	26,95	4,95	4,1	9,15	7,0	
2,60	23,56	4,90	4,3	10,2	7,8	
2,60	23,53	5,06	4,3	10,1	7,8	
2,83	23,44	5,2	4,3	8,85	6,8	
2,83	23,35	5,1	4,4	9,05	7,0	
2,60	22,15	7,0	4,5	7,97	6,2	
2,83	22,75	6,35	4,5	7,73	6,0	
2,60	21,31	6,09	4,6	9,15	7,1	
2,83	21,85	6,4	4,6	7,85	6,2	
2,83	21,08	6,78	4,7	7,8	6,2	
2,60	21,1	6,0	4,7	9,25	7,3	
2,60	19,15	7,32	4,9	8,62	6,8	
2,60	18,3	9,82	5,0	7,27	5,8	
2,83	17,58	9,58	5,1	7,0	5,7	
2,60	16,87	9,1	5,2	8,18	6,6	
2,83	15,75	9,2	5,5	6,7	5,4	
2,60	15,45	13,0	5,5	7,19	5,9	
2,60	13,3	19,1	6,0	6,98	5,8	
2,60	12,3	27,5	6,2	6,70	5,5	
2,60	12,0	29,7	6,3	6,74	5,6	
2,60	11,95	27,5	6,3	6,95	5,8	
2,83	11,65	22,26	6,4	7,03	5,9	
2,65	28,76	2,75	3,9	14,5	10,8	$= 5{,}4 \times 2$
0,863	24,45	12,4	4,3	14,7	11,3	$= 5{,}65 \times 2$
2,60	20,26	3,97	4,8	13,4	10,6	$= 5{,}3 \times 2$
2,60	16,78	3,86	5,2	15,5	12,5	$= 6{,}25 \times 2$
0,863	14,6	34,4	5,7	15,3	12,5	$= 6{,}25 \times 2$
2,60	15,9	2,5	5,4	23,1	18,8	$= 6{,}26 \times 3$

Mittel 6,25

Tabelle IV.

Schwefelqualm ($s = 1$) in Luft ($\mu = 1{,}80 \cdot 10^{-4}$).

Fallstrecke 0,0660 cm.

Feld in e. s. E.	Fallzeit in sec	Hebezeit in sec	$a \cdot 10^5$	$\varepsilon' \cdot 10^{10}$	$\varepsilon \cdot 10^{10}$	
2,80	36,4	3,1	3,4	10,7	7,7	
2,80	30,1	3,4	3,8	11,0	8,2	
2,80	28,1	4,5	4,0	8,5	6,5	
2,73	27,8	5,8	4,0	7,5	5,7	
2,80	27,4	4,9	4,0	8,0	6,1	
2,63	26,3	5,6	4,1	8,35	6,4	
2,80	26,4	4,7	4,1	8,98	6,9	
2,63	24,45	5,5	4,3	8,85	6,8	
2,73	23,5	7,01	4,4	7,28	5,7	
2,66	22,2	6,35	4,5	8,4	6,6	
2,80	22,6	7,75	4,5	6,79	5,4	
2,63	20,48	7,5	4,7	7,9	6,2	
2,73	18,8	11,2	5,0	6,42	5,1	
2,66	17,8	10,2	5,1	7,15	5,7	
2,73	17,36	10,04	5,2	7,33	5,9	
2,66	15,45	12,9	5,5	7,05	5,8	
2,66	13,03	23,4	6,1	6,47	5,1	
2,73	12,4	20,85	6,2	7,1	5,9	
2,73	12,4	26,15	6,2	6,5	5,4	
2,80	30,43	1,85	3,8	19,3	14,4	$= 7{,}2 \times 2$
2,80	25,15	2,35	4,2	17,1	13,1	$= 6{,}55 \times 2$

Mittel 6,23

$6{,}25 \cdot 10^{-10}$, Schwefelqualm[1]) ebenso $6{,}23 \cdot 10^{-10}$. Daß diese Werte in Übereinstimmung mit dem ersten Maximum der früher angegebenen Verteilungskurve wesentlich höher liegen, läßt sich ungezwungen durch die Annahme, die Dichte der Tröpfchen sei infolge der gelösten Substanzen (etwa phosphorige Säure $s = 1{,}65$, Schwefelsäure $s = 1{,}85$) größer als 1, erklären. Die Dichte 1,4 würde in beiden Fällen beiläufig genügen, um den Mittelwert der Ladung auf $4{,}9 \cdot 10^{-10}$ zu bringen[2]). Ob die stärkere Streuung bei Phosphor- und Schwefelnebel, die sich namentlich im Auftreten höherer Ladungswerte bei den kleineren Tröpfchen äußert, auf Mängel der Beobachtung, auf eine unzulängliche Korrektur oder auf verschiedene Dichten der einzelnen Tröpfchen deutet, möchte ich noch nicht entscheiden.

Nachtrag bei der Korrektor (22. März 1911): Einige neuere Messungen an kleineren Tröpfchen mit Radien bis herab zu $2{,}0^{-5}$ cm haben ähnliche, nur begreiflicherweise noch etwas unregelmäßigere Werte ergeben, die keine Tendenz zeigen, den Elektronenwert zu unterschreiten.

1) Schwefelqualm enthält verhältnismäßig viele ungeladene Teilchen, entsprechend der geringen Ionisation der Schwefelflamme (G. C. Schmidt, Ann. d. Phys. **10**, 704, 1903; L. Bloch, C. R. **148**, 782, 1909).

2) An anderer Stelle (Wiener Ber. **119**, 1723, 1910) wurde aus einer allerdings sehr rohen Schätzung des Phosphorgehaltes der Luft geschlossen, daß die Abweichung der Tropfendichte von der Einheit den Ladungswert kaum um 10 Proz. beeinflussen dürfte; doch war damals die Cunninghamsche Korrektur noch nicht berücksichtigt worden, die der Dichte einen größeren Einfluß einräumt, so daß hier kein Widerspruch vorliegt. — Betrachtet man den Wert $4.9 \cdot 10^{-10}$ wenigstens für große Tropfen als hinreichend fundiert, so geben Messungen wie die vorliegenden ein Mittel, die Dichte minimaler Substanzmengen in Nebelform zu bestimmen.

Wien am 3. März 1911.

(Eingegangen 6. März 1911.)

Über die Frage des Elementarquantums der Elektrizität.

(Zum Teil Erwiderung an die Herren E. Regener, R. A. Millikan und H. Fletcher.)

Von Felix Ehrenhaft.

Gegen die nach meiner Methode erschlossenen Ladungsbestimmungen an ultramikroskopischen Einzelteilchen, durch welche ich zu der Vermutung gekommen bin, daß es in der Natur Elektrizitätsmengen zu geben scheint, die kleiner sind, als das derzeit zu $4{,}9 \cdot 10^{-10}$ e. s. E. festgelegte Elektron, sind einige Einwendungen erhoben worden. Wenn diese auch größtenteils

in meiner vorerschienenen Abhandlung[1]) in dieser Zeitschrift entkräftet erscheinen, will ich doch zur Klärung der Fragen einiges ergänzen.

Die Einwendung Regeners[2]) bezüglich der Homogenität meines Kondensators, eingerichtet für Ultramikroskopie, vorschraubbar vor das Zeiß-Achromatobjektiv B, ist nicht stichhältig, da der Plattendurchmesser desselben 5 mm beträgt (S. 95 l. c. wurde dieser leider irrtümlich zu 4 mm angegeben); wofern man auf die sonst kreisrunde Form der Beugungsscheibchen verzichtet, kann die Plattendistanz auch unter 1,5 mm verringert werden, was durch einfaches Hineinschrauben der die Platten des Kondensators bildenden Schrauben SS erfolgt. In der Skizze (Fig. 1) ist der Teil des Kondensatorraumes, in dem die Beobachtungen erfolgen, durch den kleinen Kreis in der Mitte gekennzeichnet; der Kondensator steht daher dem Regeners an Homogenität in keiner die Versuche beeinträchtigenden

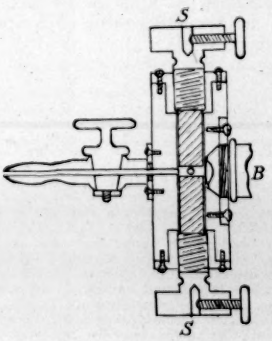


Fig. 1. Natürl. Größe. Beobachtungsobjektiv B. Achse des Beleuchtungsobjektives S senkrecht zur Zeichenebene. Der Kreis zwischen den Kondensatorplatten ist das Gesichtsfeld, in dem beobachtet wird. Ist aber senkrecht zur Zeichenebene zu denken.

Weise zurück, da bei den Messungen vorzitierter Abhandlung die Plattendistanz fast ausschließlich 1 mm betrug, bei wenigen Messungen 1,5 mm, die Entfernung der den Kondensator direkt abschließenden Frontlinse des Objektivs von der Beobachtungsebene beträgt 3 mm. Aber auch mit einem vor ein Zeiß-Achromatobjektiv AA geschraubten Kondensator (Beleuchtungsobjektiv AA nach Abschrauben der vordersten Linse oder besser a_3, Plattendurchmesser zur Plattendistanz wie 14:1,5) bei Verwendung äußerster Ultramikroskopie (Skizze Fig. 2) weichen meine Resultate in keiner Weise von

1) Diese Zeitschr. **12**, 94, 1911.
2) Diese Zeitschr. **12**, 141, 1911.

den bisherigen ab; es kann die Unstimmigkeit auch nicht am Kondensator gelegen haben, denn Herr Regener ist selbst an Metallpartikeln ähnlich wie ich nicht zur Übereinstimmung mit dem Elektronenwerte gekommen[1]). Letzteren Kondensator hatte ich schon lange vor Regeners Einwand bei Zeiß konstruieren lassen, er hat durch Objektiv AA den Vorteil längerer Beobachtungsstrecken, den Nachteil lichtschwächerer Beugungsscheibchen. E. Regener hat als Kriterium für ein störungsfreies Feld die Möglichkeit, ein und dasselbe Partikel vielmals hintereinander steigend und fallend beobachten zu können, hingestellt. Dieses Kriterium ist bei meinen Anordnungen durchaus erfüllt gewesen, trotz der wesentlich geringeren Tiefenschärfe der andern Objektive als der des Achromats AA, auf welche es nach meiner Ansicht vor allem ankommt. Dr. Anton Kailan hat ein ultramikroskopisches Goldpartikel, hergestellt in trockener Kohlensäure, über 80mal ohne Abweichung fallend und steigend beobachtet, trotzdem dieses Partikelchen viel kleiner ist, als die

Fig. 2. Natürl. Größe. Beobachtungsobjektiv AA. Achse des Beleuchtungsobjektives a_3 (Zeiß) senkrecht zur Zeichenebene. Bezügl. des Gesichtsfeldes wie bei Fig. 1.

großen Tröpfchen Regeners, und ein Verfolgen des Partikels bei mit dem Beobachtungsmikroskop fest verbundenen Kondensator ausgeschlossen ist. Dagegen beobachtet Herr Erich Regener kleine Tröpfchen, indem er die beleuchtenden Strahlen schräg gegen die Achse des Mikroskops richtet, so daß die einzelnen Teilchen als helle Pünktchen auf schwach erleuchtetem Grunde erscheinen. Es gelangen bei einer solchen Anordnung aber außer den von den Teilchen reflektierten, die Beugungsscheibchen erzeugenden Strahlen noch ein Teil der beleuchtenden Strahlen in das Mikroskop, welche auch ohne Vorhandensein der Teilchen die Erleuchtung des Gesichtsfeldes bewirken, und gerade dieser Rest der direkten Strahlen überflutet das von den ultramikroskopischen Partikeln in das Mikroskop gebeugte Licht, so daß sich diese alle der Beobachtung entziehen. Denn nur in der korrekten Anordnung der Beleuchtung unter voller Ausnutzung des optischen Kontrastes ist der Fortschritt der ultramikrosko-

1) Diese Zeitschr. **12**, 139, 1911.

pischen Anordnung nach Siedentopf gelegen. Millikan benutzt sogar bloß ein Fernrohr (Kathetometer), das wohl bloß viel größere Partikel zu beobachten gestattet. Wenn nunmehr alle Beobachter jetzt bereits am Einzelteilchen messen und sich von jenen Mittelwertsmethoden, gegen welche ich scheinbar nunmehr durchaus anerkannte prinzipielle Einwendungen erhoben habe[1]), abgewandt haben, so kommen sie alle der von mir aufgestellten zweiten Forderung, zur Erschließung der kleinsten Ladungen am Einzelteilchen die Messungen bis an die Grenze der optischen Möglichkeiten durchzuführen, noch nicht nach. Die untere Grenze der Partikelgröße aller dieser Beobachter liegt nunmehr über $3{,}1 \cdot 10^{-5}$ cm, und unter 32 Tröpfchen dieser und höherer Größenordnung fand Regener nur 7mal die angeblich kleinste Elementarladung zwischen 4,59 und $5{,}53 \cdot 10^{-10}$ e. s. E. Wie ich aber bereits vor Erscheinen der in Diskussion gezogenen Abhandlung Regeners geschlossen habe, scheinen im allgemeinen Partikel mit einem Radius der ultramikroskopischen Größenverordnung vielfach Ladungen zu tragen, die kleiner sind als das derzeit zu $4{,}9 \cdot 10^{-10}$ e. s. E. festgelegte Elektron[2]). Die ultramikroskopisch noch leicht sichtbar zu machende Größenordnung der Radien für in Flüssigkeitssuspensionen nicht absetzende kolloidale Goldpartikel liegt je nach Erzeugung der Suspension zwischen 0,4 bis $3{,}5 \cdot 10^{-6}$ cm und darunter, der in Flüssigkeiten absetzenden Goldpartikel von $4{,}5 \cdot 10^{-6}$ cm aufwärts. Also selbst die großen kolloidalen Goldteilchen sind wesentlich kleiner als die von vorerwähnten Autoren angegebenen Tröpfchen Wassers oder Öles; die Radien der Goldpartikel, an welchen ich gemessen habe, liegen zwischen 3 und $10 \cdot 10^{-6}$ cm. Hie und da ist es mir gelungen, ein größeres orangefarbiges Goldteilchen vom Radius $15 \cdot 10^{-6}$ cm durch raschen Luftstrom vor das Mikroskop zu bringen. Aus obenerwähnten optischen Gründen gestattet jedoch die Versuchsanordnung Regeners, Millikans und auch die jetzt in Benutzung stehende Versuchsanordnung Karl Przibrams nicht, an so kleinen Tröpfchen exakte Versuche zu machen.

Aber auch Herr Regener hat die Ladungen der Teilchen, welche von der Verdampfung bezw. Zerstäubung einer Silberelektrode[3]) in getrockneter Luft herrühren, nicht auf das Elementarquantum $4{,}9 \cdot 10^{-10}$ e. s. E. bezw. dessen Vielfaches zurückführen können und damit eigentlich ähnliche Unstimmigkeiten und Unterschreitungen konstatiert wie ich. Er begründet dies aber damit, daß die im Lichtbogen gebildeten Stickoxyde sowie Ozon mit dem Silberpartikelchen Verbindungen eingehen und hält daher das Material für ungeeignet. Anderseits läßt er es dahingestellt, ob ich nicht Nebelpartikel beobachtet hätte. Ich habe bereits vom ersten Anbeginn auf diese Umstände geachtet[1]) und deshalb die Messungen in Luft, die wochen- und monatelang vorher auf das sorgfältigste getrocknet war, vorgenommen[2]). Stickoxyde und Ozon sind gasförmig und es ließe sich daher, falls Regener Nebel, entstehend durch Lösung der Stickoxyde in Wasser, beobachtet haben sollte, das nur durch eine unzureichende Trocknung der Luft erklären. Der Unterschied zwischen großen Nebelpartikeln und ultramikroskopischen kolloidalen Silberpartikeln ist aber typisch, von mir mehrmals beschrieben und nicht zu verkennen[3]). Aber selbst wenn nicht Silberpartikel, sondern Teilchen von Silbersalzen oder Silberoxyde beobachtet würden, lassen sich selbst unter Zugrundelegung des spezifischen Gewichtes dieser Verbindungen noch viele Ladungen finden, die selbst nach der durchaus zu große Werte ergebenden Stokesschen Formel berechnet, noch immer die Ladungen des Elektrons 4,9 wesentlich unterschreiten. In vollständig getrockneter Luft bleiben jedoch die Stickoxyde und der Ozon gasförmig und können, falls sie überhaupt mit Silber in Reaktion treten, nur Dichteänderungen bewirken, die nicht ausreichen, die Unterschreitungen des Elektronenwertes aufzuklären (vgl. Nr. 2 vom 8. XI. diese Zeitschrift; **12**, 99, 1911). Eine Reaktion solcher Gase mit ultramikroskopischen Goldpartikeln, von welchen ich in vorerwähnter Abhandlung Serienmessungen angegeben habe, erscheint aber nach den derzeitigen Kenntnissen der Chemie vollständig ausgeschlossen. Jedenfalls aber sind die Einwendungen E. Regeners auf diese Partikel ultramikroskopischen Goldes nicht anwendbar.

Schon vor der Publikation E. Regeners habe ich auch in völlig getrockneter[4]) Kohlensäure Messungen in vorerwähntem für äußerste Ultramikroskopie eingerichteten Kondensator (Plattendistanz 1,5 mm, Kondensatordurchmesser 14 mm, Beobachtungsobjektiv AA, Beleuchtungsobjektiv AA ohne Frontlinse oder besser a_3, beobachtete Fallstrecke $310 \cdot 10^{-4}$ cm völlig schwarzes Gesichtsfeld) Serienmessungen an ultramikroskopischen Goldpartikeln vorgenommen; ich führe hier aus vielen anderen gleichartigen und auch

1) Wiener Bericht IIa, **119**, 826.
2) Diese Zeitschr. **12**, 103, 1911.
3) Diese Zeitschr. **12**, 139, 1911.

1) Wiener Akademieberichte, Bd. CXIX, Abt. IIa, S. 25.
2) Diese Zeitschr. **12**, 95, 1911.
3) Wiener Akademieberichte, Bd. CXIX, Abt. IIa, S. 26; diese Zeitschr. **11**, 622, 623, 1910.
4) Trocknung wie diese Zeitschr. **12**, 95, 1911.

Ultramikroskopisches Gold in absolut getrockneter Kohlensäure.
(Koeffizient der inneren Reibung $=1{,}5 \cdot 10^{-4}$, mittlere Weglänge $6{,}5 \cdot 10^{-6}$ cm.)

Absolutes elektrostatisches Feld	Fallzeit in Sekunden	Hebezeit in Sekunden	Radius 10^6 cm berechnet nach Stokes	Radius 10^6 cm berechnet nach Cunningham $f=0$	Radius 10^6 cm berechnet nach Cunningham $f=1$	Absolute elektrostatische Ladung 10^{10} Stokes	Absolute elektrostatische Ladung 10^{10} Cunningham $f=0$	Absolute elektrostatische Ladung 10^{10} Cunningham $f=1$
				Partikel 1.				
0,67	4,5	14,0						
	4,5	15,6	Mittel 8,55	6,22	4,57	3,27	1,24	0,51
	4,1	14,7						
	4,3	15,7						
	4,6	14,8					1,12	
	5,3	15,8	$a_{min}=8{,}1$	5,8	4,3			
	4,6	15,5						
	4,5	14,9						
	4,8	15,2						
	4,3	13,9						
	5,0	16,3	$a_{max}=9{,}0$	6,6	5,0		1,69	
	3,7	15,8						
	4,6	17,1						
	4,1	15,9						
	4,4							
				Partikel 2.				
0,62	16,4	27,9	Mittel 7,56	5,32	3,90	0,5	0,36	0,32
	20,2	27,8						
	21,2	23,6		$a_{max}=5{,}9$			$\epsilon_{max}=0{,}40$	
				$a_{min}=5{,}0$			$\epsilon_{min}=0{,}33$	

für sehr kleine Partikel noch viel längeren Messungsserien zwei typische an, die übrigen werde ich in ihrer Vollständigkeit in den Berichten der Wiener Akademie der Wissenschaften veröffentlichen.

Bei Partikel 1 beträgt die mittlere Abweichung der elektrischen Bewegung 0,37 Sek. (7,5 Proz.), bei der Fallbewegung 0,84 Sek. (5,5 Proz.). Es ergibt sich daraus eine mittlere Brownsche Komponente in der Zeit t für die elektrische Bewegung zu $11\sqrt{t}\cdot 10^{-4}$ cm, für die Fallbewegung zu $4{,}4\cdot\sqrt{t}\cdot 10^{-4}$ cm Verschiebungen, die gegen die Fallstrecke $310\cdot 10^{-4}$ cm nicht in Betracht kommen. Die theoretisch zu erwartende Komponente würde $20\sqrt{t}\cdot 10^{-4}$ cm betragen[1]). Die Partikel beugten orangefarbiges Licht selektiv ins Mikroskop, wofern sie nicht allzu klein sind, so daß man wegen Lichtschwäche über Farbe nichts mehr aussagen kann und wurden etwa $^1/_2$ Stunde nach der Erzeugung der Suspension gemessen. Unter Zugrundelegung derselben Widerstandsformel, die Millikan und Regener zur Definition ihrer Teilchengrößen benutzen (Cunningham $f=0$), ergibt Partikel 2 eine Ladung unter dem zehnten Teile der Elektronenladung, Partikel 1 den vierten Teil derselben. Wollte man diese erheblichen Ladungsunterschreitungen, die ersichtlicherweise nicht durch Brownsche Bewegung vorgetäuscht sein können (in der Tabelle sind die den Maximal- bezw. Minimalwerten entsprechenden Größen der Ladung und des Radius angeführt und zeigen, daß die Schwankungen der Serien ohne jeden Belang sind), auf den Umstand zurückführen, daß diese kleinen Partikel kolloidalen Goldes eine wesentlich geringere Dichte, entgegen allen bisherigen Annahmen, als die des Goldes besitzen, dann müßte unter der Voraussetzung, daß die Partikel die derzeit zu $4{,}9\cdot 10^{-10}$ e. s. E. festgesetzte Elektronenladung getragen hätten, dem Partikel 1 die Dichte 3,6, dem Partikel 2 jedoch die Dichte 0,52 zugeschrieben werden, also für kolloidales Gold doch völlig unplausible Dichten. Unter Voraussetzung dieser Dichten müßte aber Partikel 1 den Radius $17\cdot 10^{-6}$, Partikel 2 sogar einen Radius $43\cdot 10^{-6}$ cm gehabt haben, was aber schon in Anbetracht der außerordentlichen Lichtschwäche dieser Partikel, die viel weniger Licht ins Mikroskop abbeugen als Nebelpartikel dieser Größenordnung, mir sehr unwahrscheinlich erscheint. Anderseits könnte man zu dem Schlusse gelangen, daß die ultramikroskopischen Partikel nur mit kleinen Bruchteilen des Elektrons geladen sind, oder daß die Bewegungsgesetze, die den Prämissen der klassischen Mechanik oder der Gastheorie entspringen, zu Konsequenzen führen, die in der Natur nicht begründet

1) Diese Zeitschr. 12. 98, 1911.

sind oder daß noch Umstände mitspielen, die bisher weder von mir noch von den andern Herren Mitarbeitern aufgeklärt werden konnten. Das Partikel 2 trägt selbst, nach Stokes berechnet, eine Ladung von etwa dem zehnten Teil der Elektronenladung. Ob aber da die zuerst von Karl Przibram und neuerdings von Millikan[1]) gegen meine Ergebnisse herangezogenen Einwendungen der elektrischen Reibung, die bisher bloß für Partikel von der Größenordnung der Molekeln und da auch nicht einwandfrei herangezogen wurden, für Partikel, die noch über 100 Millionen Molekeln umfassen, extrapoliert werden dürfen, schiene erst eines begründeten Nachweises bedürftig, um so mehr, als ich auf eine Umladung eines ultramikroskopischen Goldpartikels durch Radiumbestrahlung wohl durch eine Änderung der elektrischen Steigzeit schließen konnte, dagegen trotz Änderung der elektrischen Steigzeit die Änderungen der Fallzeiten des Partikels in dieser Serie nicht eingetreten ist, welche notwendigerweise hätte erfolgen müssen, wenn bereits bei dieser Größenordnung man daran denken dürfte, daß die Reibung eine Funktion der elektrischen Ladung wäre (kolloidales Gold). Elektrische Hebezeiten 15,4, 13,7, 11,7, 15,0, 14,0, 15,6, 14,8, — 16,7, 4,3, 1,5, 1,1 usw. Sek., dazwischen Fallzeiten 11,7, 10,0, 10,7, 11,1, 11,9, 10,6, — 10,7, 10,0, 10,0, 10,0 usw. (Nach dem Striche Radium wirksam.)

Man kann sagen, daß Herr Millikan die Fallformel unter Voraussetzung einer unteilbaren Elektronenladung $4{,}9 \cdot 10^{-10}$ e. s. E. bestimmt, eine Methode, die offenbar nicht dazu führen kann, die Größe der Elektronenladung aus den Gesetzen der Mechanik zu bestimmen, und das wäre wohl das Problem, das an allen Materialien, bei allen Erzeugungsweisen, gelöst werden müßte, wofern man in der Elektronenladung eine fundamentale Naturkonstante erblicken will. In seiner nachbesprochenen Abhandlung gibt Herr Fletcher an, es wäre Herrn Millikan der Nachweis gelungen, daß bei kleinen Öltröpfchen sämtliche Stöße der Luftmolekeln unelastisch verlaufen (Cunningham $f = 0$). Dieser Nachweis ist in den von den Herren veröffentlichten Arbeiten bisher nirgends enthalten, sondern es wurde gerade diese sonst nicht begründete Widerstandsformel lediglich vorausgesetzt. Nach meiner Ansicht kann jedoch, ich zitiere da einen Gedankengang W. Ostwalds in einer andern Frage der Molekularphysik, eine solche Bestimmung der Elektronenladung nur dann bindend sein, wenn diese erwähnte Freiheit geschwunden ist, d. h. daß die Fallformel durch andere Gründe bestimmt wird als durch den, daß die gesuchte Übereinstimmung zum Elektronenwert erhalten bleibt. Wenn man nun gar noch für kleine Partikel andere Dichten annimmt als bei größeren Massen, dann kann man mit zwei Freiheiten solcher Art in den beiden, den Radius und die Ladung bestimmenden Gleichungen[1]) Übereinstimmungen mit dem Elektronenwerte jederzeit leicht erzielen. Damit erscheint jedoch das Elektron mit dem Werte $4{,}9 \cdot 10^{-10}$ e. s. E. als unveränderliche Naturkonstante vorausgesetzt, nicht aber erwiesen. Herr Regener führt selbst an, daß bei Annahme der unbekannten Größe $f = 1$ in den Cunninghamschen Formeln (daher auch für $f = \frac{1}{2}$, berechtigter nach Kundt und Warburg) sich wie bei meinen Messungen aus seinen und aus Millikans Messungen ergibt, daß mit abnehmendem Radius diese größeren Tröpfchen abnehmende Ladungen tragen, und dies erscheint nur natürlich und schließt sich völlig an meine Experimente an ultramikroskopischen Metallen an.

Im übrigen möchte ich mich auf die Fragen der Berechtigungen dieser oder jener Korrektur derzeit noch nicht einlassen, weil diese Frage für die von mir vermutete Unterschreitung der Elektronenladung nicht von prinzipieller Bedeutung ist, denn selbst unter Zugrundelegung der die größten Ladungswerte ergebenden Stokesschen Formel lassen sich, wie nachgewiesen, Unterschreitungen feststellen.

In bezug auf die in dieser Zeitschrift **12**, 161, 1911 neuerschienenen Abhandlungen der Herren R. A. Millikan und Harvey Fletcher muß ich, um allen Mißverständnissen vorzubeugen, darauf hinweisen, daß es Herrn Millikan entgangen zu sein scheint, daß meine erste Abhandlung, in der die Elektrizitätsmengen an ultramikroskopischen Einzelteilchen gemessen wurden, im Anzeiger der Wiener Akademie der Wissenschaften bereits am 14. März 1909, Nr. 7, erschienen ist, während Millikans erste Notiz in der Phys. Rev. **29**, 560, sich auf einen erst am 23. Oktober 1909 gehaltenen Vortrag bezieht. Meine diesbezügliche Abhandlung erschien im März 1909[2]), Millikans Fernrohrbeobachtungen an — Wassertröpfchen im Februar 1910[3]). Die Bemerkung Millikans, ich hätte an Schwärmen geladener Teilchen beobachtet, ist irrig, denn ich habe auch in dieser ersten Untersuchung durchaus an Einzelteilchen beob-

1) Diese Zeitschr. **12**, 163, 1911.

1) Diese Zeitschr. **12**, 97, 1911, Gleichungen (1), (2).
2) Wiener Akademieberichte Bd. CXVIII, Abt. IIa, S. 321, März 1909; diese Zeitschr. **10**, 308, 1909.
3) Phil. Mag., Februar 1910, S. 209. In dieser wird meine Abhandlung S. 226 zitiert.

achtet, aber bei der Berechnung ebenso wie Millikan in vorzitierter Abhandlung noch gewisse Mittelwerte gebildet. Daß auch Herr Millikan in seiner vorzitierten Abhandlung selbst auch noch Mittelwerte bildete, geht klar aus dem Umstande hervor, daß ich in meiner erneuerten Abhandlung vom Mai 1910[1]) aus vorzitierter Arbeit Millikans unter Benutzung seiner experimentellen Daten die Ladung seiner einzelnen Wassertröpfchen ohne die von Millikan vorgenommenen Mittelwertsbildungen errechnet habe. Ferner muß ich feststellen, daß ich nirgends die Gültigkeit der Stokesschen Formel vorausgesetzt habe, sondern im Gegenteil in meinen Publikationen 7 Monate vor Millikan auf die Notwendigkeit von Korrekturen an dieser Formel für so kleine Teilchen hingewiesen und die Cunninghamsche Korrektur vor allen anderen Beobachtern angeführt habe[2]).

Durch die Ergebnisse meiner in dieser Zeitschrift erschienenen Abhandlung[3]), die Millikan zur Zeit seiner Entgegnung noch nicht gekannt haben kann, sowie der vorliegenden Abhandlung ist erwiesen, daß bei geeigneter ultramikroskopischer Versuchsanordnung die glänzende Übereinstimmung der Serienmessungen nicht nur, wie dies bei Millikans Fernrohranordnung bis zu Partikeln von $1 \cdot 10^{-4}$ cm Radius, sondern bei kolloidalem Golde sich noch bis an die Grenze der äußersten Ultramikroskopie eindeutig erweisen läßt. Bei Kenntnis dieser Arbeiten hätten Millikan und Fletcher gewiß anders argumentiert. Nimmt man die extremsten Werte der Fallzeiten bezw. der Steigzeiten irgendeiner meiner Serien zusammen, dann ergeben sich aus Abweichungen durch die Brownsche Bewegung z. B. Ladungsgrenzen zwischen 1,12 und $1{,}69 \cdot 10^{-10}$ statt des Mittels $1{,}24 \cdot 10^{-10}$ e. s. E. oder bei Partikel 2 $0{,}4 \cdot 10^{-10}$ bezw. $0{,}33 \cdot 10^{-10}$ statt des Mittels $0{,}36 \cdot 10^{-10}$ e. s. E.

Wenn Millikan bei kleineren Partikeln bisher keine Übereinstimmung erhielt, so ist das ersichtlicherweise in seiner für größere Partikel geeigneten Fernrohranordnung gelegen, bei der großen Tiefenschärfe eines Fernrohres dürften auch schieflaufende Partikel mit gemessen werden und dies könnte bei für ein Fernrohr zu kurz bemessenen Fallstrecken erhebliche Abweichungen geben. Die Vergrößerung meiner ersten ultramikroskopischen Anordnung war 250fach. Die dabei benutzte Fallstrecke betrug $102 \cdot 10^{-4}$ cm. Millikans Kathetometeranordnung, einer Bemerkung dieses Autors in bezug auf Herrn Przibrams Mikroskopvergrößerung zufolge, betrug ca. den zehnten Teil meiner oben erwähnten. Eine genaue Angabe gibt Millikan leider nicht. Daß bei Beobachtungen mit dem Fernrohr, unter Berücksichtigung seiner viel kleineren Vergrößerung, eine für ultramikroskopische Beobachtung große Fallstrecke zu Mißerfolgen führen muß, ist selbstverständlich. Wenn Millikan daher in bezug auf meine Experimente Schlüsse ziehen will, dann müßte er dieselben Mittel verwenden wie ich. Überdies habe ich schon wiederholt darauf hingewiesen, daß die spezifisch viel schwereren Metallsuspensionen etwa $^1/_2$ Stunde nach Erzeugung trotz ihrer außerordentlichen Kleinheit mit viel größerer Regelmäßigkeit und mit ganz geringen Brownschen Bewegungen sich beobachten lassen, wie etwa die spezifisch viel leichteren Öl- oder Wassertröpfchen anderer Beobachter. Das vorerwähnte, von Anton Kailan 80mal gehobene und gesenkte Partikel ergibt aus den extremsten Werten der Fallzeiten der Serie $5{,}1 \cdot 10^{-6}$ beziehungsweise $6{,}5 \cdot 10^{-6}$ cm Radius und diese Extreme mit den Extremen der elektrischen Hebezeiten kombiniert 1,1 bezw. $0{,}8 \cdot 10^{-10}$ e. s. E. Ladung. Durch diese Argumente und durch die vorangeführten Serien an Gold in Kohlensäure werden alle Einwendungen Millikans und Fletchers bezüglich der Brownschen Bewegung hinfällig. Über das Verhalten größerer Partikel habe ich mich bisher noch jeder Aussage enthalten. Den wichtigsten Punkt meiner Ergebnisse erwähnte auch Herr Millikan, der denn auch durch Millikans Schlüsse in keiner Weise tangiert wurde. Daß mit ultramikroskopischer Beobachtungsmethode in ganz homogenem Kondensator sich an ultramikroskopischen Metallpartikeln Serienmessungen an Einzelteilchen in absolut getrockneter Luft oder Kohlensäure vornehmen lassen, deren Einzelwerte wie immer kombiniert, den Elektronenwert ganz erheblich unterschreiten, mag man zur Definition der Partikelgröße welche der Fallformeln immer verwenden. Ohne auf die Betrachtungen Fletchers[1]) über die Brownsche Bewegung näher einzugehen, ist aus vorerwähnten Gründen klar, daß die Abweichungen meiner Werte vom Elementarquantum keine Zufallsabweichungen sind, sondern die Schwankungen der Fallzeiten und der elektrischen Hebezeiten durch Brownsche Bewegung ziehen nur ganz enge Grenzen für die Größe der Ladung. Ferner kann die Brownsche Bewegung in einer Serie keineswegs die Abweichungen der Mittelwerte dieser Serien voneinander erklären. Wenn Herr Fletcher folgert, daß so starke Abweichungen der Ladung an demselben Einzel-

1) Wiener Akademieberichte Bd. CXIX, Abt. IIa, S. 825.
2) Ebendort S. 860.
3) 1. Februar 1911, S. 99, 100.

1) Diese Zeitschr. 12, 202, 1911.

teilchen, wie er sie in Tabelle 5 angibt, durch Brownsche Bewegung vorgetäuscht sein können, so ist dies eben nur unter seiner Voraussetzung möglich, daß die beobachteten Zeiten für den Fall Schwankungen von 4,7—10,3 Sek. in die elektrischen von 2,7—20,6 Sek. aufweisen. Solche Schwankungen sind aber bei meinen Serien an ultramikroskopischen Metallpartikeln von mir niemals beobachtet worden. Die Abweichungen der von Millikan mit oberwähnter für Fernrohranordnung und große Partikeln zu kurz bemessenen Fallstrecke gemessenen Messungsserie[1]) überschreiten überdies die für ein Tröpfchen vom Radius $4 \cdot 10^{-5}$ cm theoretisch zu erwartende Brownsche Bewegung. Aber selbst wenn sie vorhanden wären, bleiben trotzdem durch die Argumentationen Fletchers jene Serien ganz unerklärt, deren Einzelbeobachtungen, beliebig kombiniert, fortgesetzt viel kleinere Werte ergeben als die Elektronenladung. Denn durch die Brownsche Bewegung können bloß Verteilungen der Werte einer Serie nach einem Fehlerverteilungsgesetze erklärt werden, um Mittelwerte, die ein Vielfaches der Elektronenladung sein müßten, es bleiben aber jene Serien ganz unerklärt, die bei Metallpartikeln ganz minimale Brownsche Bewegungen zeigen und deren alle Kombinationen Ladungen ergeben, die tief unter dem derzeit angenommenen Elementarquantum liegen. Es ist also einleuchtend, daß Fletchers Überlegungen an meinen Serien auch ihn zu meinen Schlüssen führen müssen und die Ladungsunterschreitungen in keiner Weise aufklären können. Es wäre interessant, wenn er seine Betrachtungen auf meine Serienmessungen erstrecken würde, die ich in der Wiener Akademie der Wissenschaften zu veröffentlichen im Begriffe stehe. Die Anwendung auf alle von mir gemessenen Einzelteilchen verschiedener Größe vertritt er selbst nicht einmal ernstlich, denn es entbehrt jeder Begründung, eine Theorie der Brownschen Abweichungen, die nur für lange Serien an einem und demselben Partikel gültig ist, an Partikel ganz verschiedenen Radius zu erproben, es müssen dann alle Schlüsse ohne meritorische Bedeutung sein, wie dies Fletcher in bezug auf Anwendung seiner Theorie auf die verschiedenen Teilchen meiner Abhandlung vom Mai 1910 ja selbst zugibt. Im Gegenteil, das wäre gleichbedeutend damit, die bei mir übrigens ganz geringen Schwankungen der Brownschen Bewegung mit den in der Natur begründeten Abweichungen der Größen der einzelnen Partikel und der Ladungen der Teilchen zusammenzuwerfen. Es werden dadurch Dinge zusammengebracht, die man zu trennen bestrebt sein muß. Und daß die Partikel von ganz verschiedenem Radius sind, geht eindeutig schon aus ihren je nach Fallzeit auch verschiedenen Lichtintensitäten hervor[1]). Also auch in diesem Punkte sind Fletchers Argumentationen nicht stichhaltig.

Als Resultat dieser Arbeit sei zusammengefaßt:

1. Der von Regener erhobene Einwand der Inhomogenität meines Kondensators für Achromatobjektiv B beruht auf einem Mißverständnis und einem Druckfehler (Verhältnis der Tiefe zur Höhe 5:1 und darunter); auch der von mir schon lange verwendete Kondensator (Achromat AA, eingerichtet für Ultramikroskopie, Verhältnis 14:1,5 und darunter) ergibt gleiche Resultate.

2. Die von Regener, Millikan, Przibram benutzte Anordnung schließt aus optischen Gründen die Beobachtung kleiner ultramikroskopischer Partikel aus, erhebliche Ladungsunterschreitungen habe ich konstatiert an ultramikroskopischen Teilchen, welche von obengenannten Herren bisher noch nicht untersucht wurden.

3. Stickoxyde, entstehend im Lichtbogen, sind Gase und können nur bei Vorhandensein von Wasser Kondensationsnebel bilden. Wasser war aber bei meinen Versuchen vollständig ausgeschlossen; überdies ergeben Serienmessungen an Gold in trockener Luft oder Kohlensäure ebenfalls erhebliche Unterschreitungen des Elementarquantums.

4. Die durch Brownsche Bewegung bedingte Schwankung der Fall- und Hebezeiten in ihren extremsten Werten einer Serie kombiniert, gibt enge Grenzen für den mittleren Radius und die mittlere Ladung eines Partikels. Es sind also meine Abweichungen vom Elementarquantum keine Zufallsabweichungen, sondern scheinen in der Natur begründet. Die diesbezüglichen Einwendungen Fletchers und Millikans sind schon durch diesen Umstand widerlegt, es bleiben überdies alle meine Serien an Gold und Silber unerklärt, deren Werte, wie immer kombiniert, an Metallen Ladungen ergeben, die kleiner sind als das Elektron. Würden dagegen die Goldpartikel Elektronenladung tragen, dann müßte die Dichte des kolloidalen Goldes 0,5 betragen.

5. Serienmessungen am ultramikroskopischen Golde in absolut trockener Luft oder Kohlensäure, die Größe der Partikel durch irgendeine der Widerstandsformeln definiert, geben erhebliche Ladungsunterschreitungen; definiert nach der von Millikan benutzten

1) diese Zeitschr. **12**, 162, 1911.

1) Wien. Bericht IIa, **119**, 834.

Formel leicht bis zum 12. Teile des Elektrons. Entweder ist also $4{,}9 \cdot 10^{-10}$ e. s. E. nicht die kleinste in der Natur vorkommende Elektrizitätsmenge, oder die Fallformeln der klassischen Mechanik bezw. der Gastheorie ergeben bei diesen Partikelgrößen Resultate, die in der Natur nicht begründet sind, oder es spielen noch Umstände mit, die uns derzeit nicht bekannt sind. Käme man aber anderseits zu dem durch die vielfach außerordentlich geringe Intensität der von den Partikeln abgebeugten Lichtpunkte schon unwahrscheinlichen Schlusse, daß diese Metallpartikel in Gasen eine so gelockerte Struktur hätten, daß diese Dichten möglich wären, dann wäre man aber auch bei den kolloidalen Suspensionen in Flüssigkeiten auch zu dem weiteren vielleicht ganz bemerkenswerten Schlusse genötigt, die Dichten der suspendierten Körper ganz wesentlich geringer anzusetzen. Dies widerspricht aber unseren geltenden Anschauungen über die Kolloide.

Derzeit eine Entscheidung über die verschiedenen angeführten Möglichkeiten zu treffen, liegt mir fern.

6. Jedenfalls aber gestattet diese ultramikroskopische Methode noch Partikel von einem halben Billionsten Teile eines Grammgewichtes gleichsam wiederholt einzeln auf die Wage zu legen und dessen elektrische Ladung zu schätzen.

Ich bin den Herren Dr. A. Kailan und R. Neumann von Ettenreich für Ablesungen bei den Messungen verpflichtet.

Ich erwähne dankend eine Subvention von 2000 Kronen der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien zur Fortführung dieser Untersuchungsmethoden aus den Erträgnissen der Pontischen Stiftung.

Wien, I. Physikal. Institut d. K. K. Universität, 3. März 1911.

(Eingegangen 7. März 1911.)

Zu den Abhandlungen von F. Ehrenhaft: „Über die Frage nach der atomistischen Konstitution der Elektrizität."

Von A. Joffé.

Für die Beurteilung der von Herrn F. Ehrenhaft publizierten Messungen könnte ein Umstand von Bedeutung sein, der noch nicht diskutiert worden ist: Die Art der Herstellung der untersuchten Teilchen (Lichtbogen mit Metallelektroden) läßt mit Sicherheit erwarten, daß im Untersuchungsraum außer den mikroskopischen und ultramikroskopischen (die bis an die Grenze der Sichtbarkeit heruntergingen), auch eine große Anzahl von noch kleineren geladenen Teilchen anwesend waren. Diese letzteren würden aber die Fallgeschwindigkeit der größeren Teilchen deutlich beeinflussen können etwa auf folgendem Wege:

1. Das Eigenfeld des untersuchten Teilchens wird die Verteilung der amikroskopischen Teilchen in seiner Umgebung verändern und zwar so, daß die entgegengesetzt geladenen vorherrschen. Die Wanderung im Gravitationsfelde wird dadurch wenig, die im elektrischen Felde stark verlangsamt.

2. Durch die Anhäufung der Ladungen in der Nähe der Kondensatorplatten wird das elektrische Feld in dem untersuchten Teil geschwächt. Da aber das Feld nur kurze Zeit unterhalten werden kann, ist eine Entladung der weniger beweglichen Teilchen an den Elektroden nicht zu erwarten.

Beides würde zu einer Unterschätzung der wirklichen Ladungen führen und zwar um eine von Fall zu Fall variable Größe, je nach der Dichte der amikroskopischen Teilchen. Da es sich um unsichtbare Teilchen handelt, liegen für die Abschätzung der Größenordnung ihrer Wirkung keine Anhaltspunkte vor.

Eine Absonderung der zu untersuchenden Teilchengrößen etwa auf Grund verschiedener Fallgeschwindigkeiten könnte aber diesen Umstand zum größten Teil wegschaffen.

Die Messungen von Millikan sind von diesem Einfluß frei, da hier in die staubfreie Luft nur wenige recht große Tropfen eingeführt wurden.

St. Petersburg, Physikalisches Laboratorium des Polytechnikums.

(Eingegangen 6. März 1911.)

Zahl der Zentren von Lichtemission und Intensitätsverhältnis verschiedener Interferenzordnungen.

Bemerkung zur Antwort von Herrn Stark[1]).

Von Peter Paul Koch.

In einer Bemerkung[2]) zu der in der Überschrift genannten Veröffentlichung Starks[3]) hatte ich gezeigt, daß die Ergebnisse derselben erst dann für experimentell bewiesen gelten können, wenn die Konstanz des in den Formeln vorkommenden Plattenkoeffizienten $\frac{n}{m}$ in dem in Anspruch genommenen Geltungsbereich mit der erforderlichen Genauigkeit von rund 1 Proz. dargetan ist.

1) Diese Zeitschr. **12**, 104, 1911.
2) Diese Zeitschr. **12**, 12, 1911.
3) Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. in Wien **119**, 779, 1910. Ann. (4) **33**, 1449, 1910.

Man kann sich leicht überzeugen, daß das Konstantsetzen des Faktors C in der Antwort Starks im selben Maße unberechtigt ist wie bei dem entsprechenden Faktor der Originalarbeit, solange eben die experimentellen Unterlagen für die Konstanz von $\frac{n}{m}$ nicht beigebracht sind.

Da jedoch Stark weiterhin selbst zugibt, daß seine Resultate einer experimentellen Nachprüfung hinsichtlich der Konstanz von $\frac{n}{m}$ bedürfen und da er diesbezüglich neue Versuche in Aussicht stellt, sehe ich vorläufig keine Veranlassung, mich in weitere Diskussionen einzulassen.

München, Physikalisches Institut der Universität, 3. März 1911.

(Eingegangen 6. März 1911.)

Bemerkung zu meinem Aufsatze: „Einige neuere physikalische Projektions-Demonstrationen“ [1]).

Von W. Biegon v. Czudnochowski.

In dem oben genannten Aufsatze ist S. 36, Fig. 10, eine Vorrichtung zur Demonstration des Entstehens von Mischfarben aus den drei Grundfarben mit Bezug auf die Grundlagen der Dreifarbenphotographie beschrieben und abgebildet.

Dazu habe ich berichtigend zu bemerken, daß die l. c. erwähnte besondere Anordnung zuerst von der Firma Leppin & Masche in Berlin, und zwar bereits im Januar/Februar 1909 in den von ihr herausgegebenen „Berichten“ beschrieben worden ist. In anderer, m. E. übersichtlicherer Form, allerdings unter Anwendung einer Dreifachlaterne, habe ich selbst die gleiche Demonstration im Sommer 1907 bei öffentlichen Vorträgen vielfach ausgeführt [2]); „gleich“ bedeutet hier: es werden ebenfalls durch monochromatische Lichtbündel in den drei Grundfarben einander zum Teil überdeckende Farbenfelder hergestellt. Diese Felder waren: 2 Dreiecke, 1 Rhombus, so daß ein sechsstrahliger Stern resultierte; das Verfahren ist bei Anwendung eines Spiegelchromoskops nach Ives auch bei Einfachapparaten benutzbar.

Die Apparate zur Darstellung von Schallkurven sind zuerst von der Firma Leppin & Masche, und zwar in Gemeinschaft mit Herrn Prof. Martens unter Zugrundelegung der Martensschen Zweispiegelmembrane [1]) auf Grund eingehender Versuche konstruiert worden. Die Apparate sind auch bereits in den „Berichten“ der genannten Firma, Jahrgang 1910, Heft 1, beschrieben worden, wo auch Original-Schallkurven wiedergegeben sind, welche die Herren F. F. Martens und O. Leppin zusammen aufgenommen haben.

Berlin-Wilmersdorf, den 13. Februar 1911.

1) Diese Zeitschr. **12**, 32—39, 1911.

2) Vgl. Zeitschr. f. d. physikal. u. chem. Unterricht **21**, 268, Fig. 1 u. **2**, 1908 („Die Farbenphotographie, ihre Entwickelung und gegenwärtige Ausbildung“, l. c., S. 267—274 und 338—342).

1) Vgl. F. F. Martens, Verhandl. d. Dtsch. Phys. Ges. **11**, 63 u. f., 1909.

Uran- und Neodymaggregate. (Uranium and Neodymium Aggregates.)

Von W. W. Strong.

In meiner unter dieser Überschrift in dieser Zeitschrift **11**, 668, 1910, veröffentlichten Arbeit habe ich es versäumt, der Carnegie-Institution zu Washington dankend zu erwähnen. Die in der genannten Arbeit geschilderte Untersuchung ist mit Hilfe von Zuwendungen ausgeführt worden, die seitens der Carnegie-Institution zu Washington Herrn Professor Harry C. Jones gewährt worden sind.

In der oben genannten Arbeit hätte ich ferner des Umstandes gedenken müssen, daß die dort beschriebene Untersuchung eine unter der Leitung des Herrn Professor Jones ausgeführte Fortsetzung der Untersuchungen über die Absorptionsspektren von Lösungen bildet, die im hiesigen Institut während der letzten fünf Jahre unter der Leitung des Herrn Professor Jones mit Hilfe von Zuwendungen aus der Carnegie Institution zu Washington ausgeführt worden sind. Über diese Untersuchungen haben Herr Professor Jones und seine Mitarbeiter bereits zehn Arbeiten [1]) und zweiundeinhalb Monographien veröffentlicht.

1) Wegen des Verzeichnisses der aus dem hiesigen Institut hervorgegangenen Veröffentlichungen über die Absorptionsspektren von Lösungen sehe man: Publication of the Carnegie Institution of Washington No. **130**, 145, 1910, sowie auch Ztschr. f. phys. Chem. **74**, 379, 1910.

Physikalisch-Chemisches Institut der Johns-Hopkins-Universität, 16. Januar 1911.

(Nach dem Manuskript aus dem Englischen übersetzt von Max Iklé.)

(Eingegangen 7. Februar 1911.)

PHYSIKALISCHE TECHNIK.

Ein leistungsfähiger und schnell wirkender Apparat zur Destillation von Quecksilber.

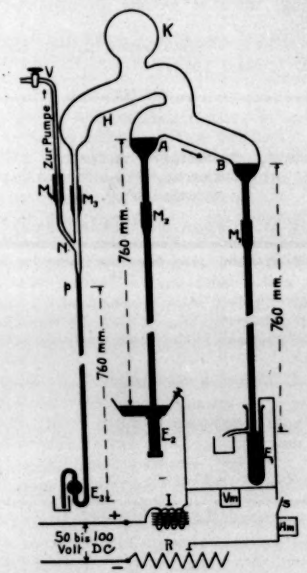
Von Ch. T. Knipp.

Vorrichtungen zum Destillieren sind so einfach und allgemein bekannt, daß der Verfasser es nur mit einem gewissen Zögern unternimmt, eine neue Form einer solchen Vorrichtung zu beschreiben. Fast jedes Laboratorium reinigt ja Quecksilber nach seiner besonderen Art und Weise. Von den zahlreichen „trockenen" Reinigungsmethoden sind jedoch zwei besonders hervorzuheben, die Weinholdsche Methode und die Methode von Hulett[1]). Die erstere Methode beruht auf der Destillation unter vermindertem Druck, während nach der zweiten außerdem noch ein kleiner Luftstrahl durch die Masse des Quecksilbers hindurchgetrieben wird. Durch Einwirkung des Luftstromes werden dabei die metallischen Verunreinigungen oxydiert. Beide Methoden geben gute Resultate, und die Wirkung der durch das Quecksilber aufsteigenden Luft, selbst nur bei Zimmertemperatur, ist jetzt allgemein anerkannt.

Der Verfasser hat im Jahre 1905 in einer kurzen Abhandlung, die er der „American Association for the Advancement of Science" auf ihrer Versammlung in New-Orleans vorlegte, eine neue Form eines Quecksilberdestillationsapparates beschrieben, bei dem das Prinzip der Quecksilberdampflampe angewendet wird[2]). Im folgenden soll diese Vorrichtung in der Gestalt, die sie nach mehrjährigem Gebrauch im Laboratorium angenommen hat, beschrieben werden.

Man kann häufig beobachten, daß sich Quecksilber an den weniger erhitzten Stellen von Quecksilberdampflampen niederschlägt. Wenn nun an eine solche Lampe eine Vorlage von geeigneter Gestalt angeschmolzen wird, kann das Quecksilber fortlaufend gesammelt werden und erweist sich als ein Produkt von sehr großer Reinheit. Damit sich aber aus dieser Lampe ein für die Praxis brauchbarer Destillationsapparat ergibt, muß ihre Gestalt noch in mehreren Punkten abgeändert werden. Die beigegebene Zeichnung veranschaulicht alle wesentlichen Teile des Destillationsapparates. Der Quecksilberlichtbogen wird zwischen den Elektroden A und B aufrecht erhalten. Diese Elektroden bestehen aus Quecksilber und stehen durch die engen Schenkel BE_1 und AE_2 von barometrischer Länge mit den Gefäßen E_1 und E_2 in Verbindung, die den Quecksilbervorrat enthalten. Die Gefäße E_1 und E_2 sind unmittelbar durch einen Regulierwiderstand und eine Induktionsspule mit einer passenden Gleichstromquelle verbunden; es ist empfehlenswert, in den Stromkreis einen Ausschalter, ein Amperemeter und ein Voltmeter einzuschalten, wie in der Figur gezeigt ist.

Die Vorlage HK kann sehr verschiedenartig gestaltet sein, die gezeichnete Form ist vielleicht die geeignetste. Durch die Neigung des Rohres H



wird das sich verdichtende Quecksilber abgeleitet und läuft aus dem Destillationsapparat durch ein kapillares Ausflußrohr M_3E_3 ab, das in seinem unteren Ende in S-Form gebogen ist. Indem das Quecksilber in Tropfen durch dieses Rohr hindurchfließt, wirkt es wie eine kontinuierliche Quecksilberpumpe. Die Vakuumpumpe, mittels deren der Apparat beim Inbetriebsetzen zuerst ausgepumpt wird, wird an einen Rohransatz N angeschlossen, der zweckmäßig an das obere Ende dieses Ausflußrohres angeschmolzen wird. M_1, M_2, M_3, M_4 sind Quecksilberverschlüsse.

1) Hulett, Phys. Rev. **21**, December 1905.
2) Science **23**, March 16, 1906.

Der Betrieb dieses Destillationsapparates ist sehr einfach, und wenn er einmal in Gang gesetzt ist, braucht er nur wenig Überwachung. Die Gefäße E_1 und E_2 werden mit dem zu destillierenden Quecksilber gefüllt und die Mündung des Ausflußrohres in ein kleines Becherglas mit reinem Quecksilber eingetaucht. Dann wird die Vakuumpumpe (es genügt jede leistungsfähige automatische Pumpe) in Gang gesetzt und die Stellung der Gefäße E_1 und E_2 so gewählt, daß das Quecksilber, aus dem die Elektroden A und B bestehen, bis zu der in der Figur angegebenen Höhe ansteigt. Das Quecksilber in der Ausflußröhre sollte nun in einem Punkte p etwa 5 oder 6 cm unter dem Stutzen N stehen. Um den Lichtbogen zu bilden, ist es nur nötig, das Gefäß E_2 ein wenig anzuheben und für einen Augenblick einen Strom von Quecksilber in der Röhre AB hinunterfließen zu lassen. Wenn das Vakuum die richtige Höhe hat, sollte der Bogen sich sofort bilden, wenn der Strom unterbrochen wird. Die Stromstärke muß dann richtig eingestellt werden. Nach 15 oder 20 Minuten kann das Ventil V geschlossen werden, vorausgesetzt, daß keiner der verschiedenen Quecksilberverschlüsse undicht ist. Das Quecksilber wird hauptsächlich aus dem Gefäß E_2 entnommen, und dieses sollte daher eine große Oberfläche haben und ziemlich flach sein. Das Gefäß E_1 ist mit einem Überlauf versehen.

Die Leistung des Destillationsapparates, d. h. die Menge des in der Zeiteinheit destillierten Quecksilbers, hängt von der Größe des Apparates und von der Stärke des angewendeten Stromes ab. In dem zuerst gebauten Apparat hatte das Rohr AB etwa 20 mm Durchmesser. Hierbei ergaben sich bei einer Stromstärke von 4 Ampere etwa 500 g Quecksilber in der Stunde. Die Klemmenspannung war hierbei 21 Volt. Bei später gebauten Apparaten war das Rohr AB 40 mm im Durchmesser und 25 mm lang. Die Vorlage HK war entsprechend größer. Mit einem solchen Apparat erzielte ich mit einem Strom von 10 Ampere etwa 1 kg Quecksilber in der Stunde. Die Potentialdifferenz an den Klemmen war 23 Volt. Der Apparat ist in Deutschland patentiert und wird in einer für die Praxis zweckmäßigen Form durch die Firma E. Leybold's Nachfolger in Köln hergestellt.

Um die Reinheit des destillierten Quecksilbers zu prüfen, wurde Zinkamalgam zur Destillation benutzt. Die Prüfung des Destillates auf Zinkgehalt wurde nach einem von Hulett vorgeschlagenen, auf der Messung der elektromotorischen beruhenden Verfahren ausgeführt. 1 mm Ablenkung des Galvanometers entsprach annähernd 0,0005 Volt. Die erhaltenen Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle enthalten.

Nr.	Zinkamalgam	Destillat von Zinkamalgam	Galvanometerausschlag
2a	1 : 700000	—	2,17 mm
100	1 : 370000	—	4,00 mm
a	—	1 : 1740	0,61 mm
b	—	1 : 1740	0,19 mm
c	—	1 : 1740	0,52 mm

Aus den beiden ersten Nummern der Tabelle 2a und 100 sehen wir, daß ein Galvanometerausschlag von 1 mm einem Zinkgehalt von 1 : 1500000 entspricht. Die Proben unreinen Quecksilbers a, b und c waren verhältnismäßig mit Zink sehr stark verunreinigte Amalgame, trotzdem zeigte sich in den Destillaten, die an drei verschieden gestalteten Vorlagen aufgefangen wurden, kaum ein Spur von Zink. Das Vergleichsmaterial, mit dem die obigen Proben in der Prüfungszelle verglichen wurden, war vor kurzem gekauftes, zweimal destilliertes Handelsquecksilber, das außerdem mehrfach und sorgfältig nach der „nassen" Methode gereinigt worden war. Zahlreiche andere Prüfungen unter verschiedenen Bedingungen wurden vorgenommen und zeigten alle, daß der beschriebene Destillationsapparat ein Produkt von sehr hoher Reinheit gibt. Selbst aus sehr unreinem Ausgangsmaterial erhält man durch eine einzige Destillation sehr reines Quecksilber. So wurde beispielsweise ein Quecksilber versuchsweise destilliert, das sehr stark mit Zink verunreinigt war. Nachdem 3—4 kg überdestilliert waren, wurde der Strom unterbrochen, und der Apparat blieb über Nacht stehen. Am nächsten Morgen war die Anode mit einer 4 mm dicken Schicht von Zink überzogen, das beim Abkühlen des Quecksilbers auskristallisiert war. Trotzdem enthielt das Destillat kaum eine Spur von Zink. In diesem Falle war der Lichtbogen bei sehr geringer Stromdichte unterhalten worden, und die Durchschnittstemperatur[1]) des Bogens war daher sehr weit unter dem Schmelzpunkt des Zinks geblieben.

Der Rückstand kann in dem Apparat bleiben, sollte aber von Zeit zu Zeit herausgenommen werden; wie oft, das hängt natürlich von der Unreinheit des destillierten Quecksilbers ab. Wenn verhältnismäßig reines Quecksilber verarbeitet wird, können 25—35 kg übergetrieben werden, ohne den Apparat auszuräumen.

1) Knipp, Phys. Rev. **31**, August 1910.

(Eingegangen 27. Februar 1911.)

BESPRECHUNGEN.

M. Tscherning, Hermann von Helmholtz und die Akkommodationstheorie, übersetzt von Dr. med. M. Thorey. 8. VI u. 106 S. mit 23 Abbildungen und Bildnis. Leipzig, Joh. Ambr. Barth. 1910. M. 3.40

In dem Buche wird Tscherningss Auffassung vom Akkommodationsmechanismus skizziert, er erwähnt und behandelt die Wirkung des Ziliarmuskels, die wirkliche Form der Linse und die irrige Auffassung, daß man sich den Glaskörper als eine Flüssigkeit, statt einer soliden Masse gedacht habe usw.

Was gegen Helmholtz' Akkommodationstheorie angeführt worden ist, wird ausführlich behandelt, in erster Reihe Tschernings eigene Untersuchungen, aber auch die Untersuchungen anderer.

Es ist sehr interessant — man meine über die Akkommodationstheorie was man will — das Buch zu lesen, und es ist zu begrüßen, daß Dr. Thorey das Buch in die deutsche Sprache übersetzt hat, ohne daß die frische Darstellung dabei nennenswert gelitten hat. K. K. Lundsgaard.

Tagesereignisse.

Die **83. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte** findet vom **24. bis zum 30. September 1911** in **Karlsruhe** statt. In der ersten allgemeinen Sitzung wird Geheimer Rat Dr. Karl Engler über Zerfallsprozesse in der Natur sprechen. Das vorläufige Programm liegt der nächsten Nummer der Physikalischen Zeitschrift bei.

Ferienkurse Jena. Vom 3.—16. Aug. 1911. (Für Damen und Herren.) Es werden im ganzen mehr als 50 verschiedene Kurse gehalten, meist zwölfstündige.

Naturwissenschaftliche Abteilung: Naturphilosophie; Botanik; botanisch-mikroskopisches Praktikum; Zoologie; zoologisches Praktikum; Astronomie; Geologie; Chemie; Physik; Physiologie; physiologische Psychologie.

Ausführliche Programme sind kostenfrei durch das Sekretariat der Ferienkurse (Jena, Gartenstraße 4) zu haben.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule Danzig Dr.-Ing. Rudolf Plank für Elastizitäts- und Wärmelehre, an der Technischen Hochschule Aachen Dr. Fr. Döringkel für Theoret. Eisenhüttenkunde.

Ernannt: Der Direktor des Physikalischen Laboratoriums der Badischen Anilin- und Sodafabrik in Ludwigshafen Professor Dr. Jonathan Zenneck zum ord. Professor der Experimentalphysik an der Technischen Hochschule Danzig, der a. o. Professor für anorganische Chemie an der Universität Berlin Dr. Franz Fischer zum ord. Professor für Elektrochemie an der Technischen Hochschule Berlin, der Assistent am Physikalischen Institut der Universität Heidelberg Dr. J. Laub zum ord. Professor für theoretische Physik und Geophysik an der Universität La Plata, Dr. W. Buchanan vom Electrical College in London zum Professor der Elektrotechnik an der Universität zu Johannesburg, der ord. Professor an der Universität Klausenburg und Dozent an der Akademie für Sozial- und Handelswissenschaften zu Frankfurt a. M. Dr. Ludwig Schlesinger zum ord. Professor der Mathematik an der Universität Gießen, der a. o. Professor an der Universität Lausanne Dr. Louis Pelet-Jolivet zum ord. Professor der anorganischen Chemie ebenda, der Privatdozent für physikalische Chemie an der Universität Jena Dr. Robert Marc zum a. o. Professor ebenda, der Observator an der Sternwarte zu Upsala Dr. Osten Bergstrand zum Direktor derselben und ord. Professor der Astronomie an der Universität Upsala, der Oberingenieur bei der Allgemeinen Elektrizitäts-Gesellschaft Fritz Emde zum etatsmäßigen Professor für Elektrotechnik und Maschinenbau an der Bergakademie Clausthal, der Privatdozent an der Universität Innsbruck Dr. Heinrich von Ficker zum a. o. Professor für Meteorologie an der Universität Graz.

Verliehen: Dem Observator am Meteorologischen Institut in Berlin Dr. Oskar Kiewel, dem Privatdozenten für physikalische Chemie, speziell theoretische Metallurgie an der Technischen Hochschule Aachen Dr. Karl Bornemann der Titel Professor, dem etatsmäßigen Professor für Mechanik und Maschinenlehre an der Bergakademie Clausthal Oskar Hoppe der Titel Geh. Bergrat, dem ord. Professor für Geodäsie und praktische Astronomie an der Technischen Hochschule Stuttgart Dr. Ernst Hammer der persönliche Adel.

In den Ruhestand: Der Professor der Mathematik am Yale College in New Haven Andrew W. Phillips, Geh. Bergrat Prof. O. Hoppe in Clausthal.

Gestorben: Der Chemiker Dr. Artur Bucky in Berlin, der Professor der Chemie am Ligurinerkloster bei Sitten (Schweiz) Cuvrier infolge Explosion chemischer Stoffe während des Vortrags, der frühere ord. Professor der Chemie Dr. Jacob Maarten van Bemmelen in Leiden, der frühere Professor der Chemie an der Ecole des Sciences in Rouen Dr. August Houpeau, der ord. Professor für reine und angewandte Mathematik an der Universität Toulouse Dr. Amadée Paraf, der Professor der Chemie am Polytechnischen Institut zu Worcester, Mass., Dr. Leonard P. Kinnicutt.

Gesuche.

Assistentenstelle

an der physikalischen Anstalt der Universität Basel zu besetzen.

Reflektanten sind gebeten sich an Prof. **Aug. Hagenbach,** physik. Anstalt Bernoullianum Basel zu wenden.

Promovierter Physiker,

z. Z. Hochschulassistent, **sucht** Stellung als Assistent an einem physikalischen Institut oder als Laboratoriumsphysiker in staatlichem oder privatem industriellen Betriebe. Offerten erbeten unter **K. M. 185** an den Verlag dieser Zeitschr.

Für die Redaktion verantwortlich Professor Dr. Friedrich Krüger in Danzig-Langfuhr. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.